UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TESIS

COMPARACIÓN ENTRE LAS INTEGRALES DE RIEMANN Y LEBESGUE

PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS

AUTOR:

Br. DIEGO ESTANISLAO HUAMAN HUAYTA

ASESOR:

Dr. ALEJANDRO TTITO TTICA

CÓDIGO ORCID:

0000–0002–6898–5307

CUSCO– PERÚ
2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, asesor del trabajo de investigación titulado: **"COMPARACIÓN ENTRE LAS INTEGRALES DE RIEMANN Y LEBESGUE"** presentado por: **DIEGO ESTANISLAO HUAMÁN HUAYTA** con Nro. de DNI: 23830626, para optar el grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS. Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por DOS veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 5 %

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera hoja del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 02 de abril de 2024

....

Firma

Post firma: Alejandro Ttito Ttica

Nro. de DNI: 2467632X

ORCID del Asesor: 0000-0002-6898-5307

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: https://unsaac.turnitin.com/viewer/submissions/oid:27259:343989197?locale=es-MX

NOMBRE DEL TRABAJO

COMPARACION ENTRE LAS INTEGRALE S DE RIEMANN Y LEBESGUE(DIEGO)

AUTOR

DIEGO HUAMAN

RECUENTO DE PALABRAS

10701 Words

RECUENTO DE CARACTERES

50969 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

60 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

712.8KB

FECHA DE ENTREGA

Apr 2, 2024 9:56 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Apr 2, 2024 9:56 AM GMT-5

5% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 5% Base de datos de Internet
- 0% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de Crossref
- Base de datos de contenido publicado de Crossref
- 2% Base de datos de trabajos entregados

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 20 palabras)

DEDICATORIA

Este trabajo dedico a la memoria de mis Padres y

a mis hijas.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradezco a Dios por su infinita bondad que me ha guiado toda mi vida.

Agradezco a mi asesor Dr. Alejandro Ttito Ttica que me ha guiado en la elaboración de mi trabajo.

RESUMEN

La finalidad del presente trabajo de investigación es determinar las condiciones bajo las cuales las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden. El estudio se desarrolló bajo un paradigma cuantitativo, de tipo básico, alcance descriptivo y un diseño no experimental transversal. La técnica aplicada es el análisis documental.

Los resultados del estudio muestran que la integral de Riemann es aplicable si la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada, continua, monótona creciente o decreciente y discontinua en un número finito de puntos de su dominio $[a, b]$. La integral de Lebesgue es aplicable si la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es medible y el conjunto de puntos de discontinuidad de la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene medida cero. Se concluye que las integrales de Riemann y Lebesgue son equivalentes si la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada, continua, monótona creciente o decreciente y discontinua en un número finito de puntos de su dominio en el intervalo $[a, b]$.

Palabras claves:

Integral de Riemann, Integral de Lebesgue, función acotada, función medible.

ABSTRACT

The purpose of this research work is to determine the conditions under which the Riemann and Lebesgue integrals coincide. The study was developed under a quantitative paradigm, basic type, descriptive scope and a cross–sectional non–experimental design. The technique applied is documentary analysis.

The results of the study show that the Riemann integral is applicable if the function $f: [a, b] \subset R \rightarrow R$ is bounded, continuous, monotonic increasing or decreasing and discontinuous in a finite number of points of its domain [a, b]. The Lebesgue integral is applicable if the function $f : [a , b] \subset R \rightarrow R$ is measurable and in the set of discontinuity points of the function $f : [a , b] \subset R \rightarrow R$ has measure zero. It is concluded that the Riemann and Lebesgue integrals are equivalent if the function $f : [a , b] \subset R \rightarrow R$ is bounded, continuous, monotone increasing or decreasing and discontinuous in a finite number of points of its domain the interval [a , b].

Keywords: Riemann integral, Lebesgue integral, bounded function, measurable function.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Situación Problemática

El cálculo de primitivas resultó ser una herramienta de gran utilidad y relativamente de fácil aplicación debido al Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann. Este teorema representa una gran ventaja porque establece una estrecha relación entre el cálculo de áreas y el cálculo de primitivas, pero deja huecos en este último hecho como demostrara Vito Volterra en 1885 al construir una función derivable en [a, b] con derivada acotada pero no integrable en el sentido de Riemann. La integral de Lebesgue aparece entonces en las primeras décadas del siglo XX, como una solución a este problema: como constructo matemático, no solo amplía el dominio que pueden tener las funciones integrales, sino que en general, amplía el propio concepto de integración.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Bajo qué condiciones los resultados de las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden?

1.2.2. Problemas Específicos

a) ¿Para qué tipo de funciones están definidas las integrales de Riemann y Lebesgue?

b) ¿Cuáles son las diferencias entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue?

1.3. Justificación de la Investigación

El presente trabajo de investigación se justifica debido a la necesidad de establecer para qué tipo de funciones es más adecuado la integral de Riemann y Lebesgue.

La integral de Riemann es limitada, solo alcanza a funciones continuas y acotadas en un intervalo cerrado, en cambio la integral de Lebesgue generaliza la integral de Riemann, por lo que es importante establecer las diferencias y las coincidencias entre la integral de Riemann y Lebesgue.

1.4. Objetivos de la Investigación

1.4.1. Objetivo General

Determinar las condiciones bajo las cuales las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden.

1.4.2. Objetivos Específicos

a) Establecer los tipos de funciones para los cuales están definidas la integral de Riemann y Lebesgue.

b) Establecer las diferencias entre las integrales de Riemann y Lebesgue.

1.5. Metodología

1.5.1. Tipo y Diseño de Investigación

El presente estudio está enmarcado en el tipo de investigación sustantiva básica, porque describe las diferencias entre las integrales de Riemann y Lebesgue.

La investigación de acuerdo al problema de estudio y los objetivos formulados, corresponde al tipo de estudio descriptivo, porque se describe para qué tipo de funciones es adecuado cada uno de los integrales propuestos.

Se asume el diseño no experimental, transversal, descriptiva; que según Hernández Sampieri, R. (2014) esta “investigación no experimental es la que se realiza sin manipular deliberadamente variables. Es decir, se trata de estudios donde no se varía en forma intencional las variables independientes para ver su efecto sobre otras variables”.

1.5.2. Técnicas de Recolección de Datos e Información

Se hará uso de la técnica documental, por considerar sus cualidades de obtener los datos con mayor confianza de las unidades de investigación y su estructura permite acceder a ella, mediante una revisión de la literatura pertinente.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

En este capítulo se define la integral de Riemann y la integral de Lebesgue, para esto, es necesario tratar los conceptos necesarios para cada uno de ellos. Primeramente, vamos a definir la integral de Riemann.

2.1. Integral de Riemann

2.1.1. Conjunto Acotado y Función Acotada

Definición 2.1.1.–

Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$,

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

1) El conjunto A es acotado, si y sólo si, existe un número real

   $m > 0$, tal que para todo x de A, $|x| \leq m$.

2) El conjunto A es compacto, si y sólo si, A es acotado y cerrado.

   $A = [a , b] \subset \mathbb{R}$ es cerrado, acotado y compacto.

3) Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada en A, si y sólo si, existe un número real

   $k > 0$, tal que para todo x de A, $|f(x)| \leq k$.

2.1.2. Función Continua

Definición 2.1.2.1.–

1) Sean (E, T_E), (F, T_F) dos espacios topológicos.

   Una función $f : E \rightarrow F$ es continua, si y sólo si, para todo

   $B \in T_F$, $f^{-1}(B) \in T_E$,

   donde $f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in F \} \subset E$.

2) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en A y sea $x = a \in A$. La función f es continua en el punto $x = a$, si y sólo si, $\lim_{x\rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Es decir, f es continua en $x = a$, si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cada x de A y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$.

3) Una función $f : \langle a , b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto c de $\langle a , b\rangle$, si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cada x de $\langle a , b\rangle$ y $|x - c| < \delta$, entonces $| f(x) - f(c) | < \varepsilon$.

Esto es, una función f es continua en $\langle a , b\rangle$, si es continua en cada punto c de $\langle a , b\rangle$.

4) Sea $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo cerrado $[a , b]$. La función f es continua en $[a , b]$, si y sólo si, f es continua en cada punto del intervalo abierto $\langle a , b\rangle$ y continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

5) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en A. La función f es uniformemente continua en el conjunto A, si y sólo si, para cada número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$, tal que para cualesquier x, y de A, si $0 < | x - y | < \delta$, entonces $| f(x) - f(y) | < \varepsilon$.

Definición 2.1.2.2.–

1) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en A. La función f es continua en un punto a de A, si y sólo si, para cada vecindad V de f(a) en $\mathbb{R}$, $f^{-1}(V)$ es una vecindad de a en A.

2) Una función $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida y continua en el intervalo acotado y cerrado $[a , b]$, es uniformemente continua en $[a , b]$.

3) Una función $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida y continua en el intervalo acotado y cerrado $[a , b]$, es acotada en $[a , b]$. Es decir, existe M de $\mathbb{R}$, $M > 0$, tal que para todo x de $[a , b]$, $| f(x) | \leq M$ o existen M_1 , M_2 de $\mathbb{R}$, tal que $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, para todo x de $[a , b]$.

4) Una función $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida y continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, tiene un valor mínimo y un valor máximo en $[a, b]$. Es decir existen puntos x_1, x_2 en $[a, b]$, tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todos los puntos x de $[a, b]$.

5) Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida y continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, de modo que $f(a)\, f(b) < 0$, entonces existe por lo menos un punto c del intervalo abierto $\langle a, b\rangle$, tal que $f(c) = 0$.

6) Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida y continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, de modo que $f(a) \neq f(b)$, entonces los valores de la función f están entre f(a) y f(b).

7) Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida y continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. La imagen directa de $[a, b]$ mediante f es cerrado y acotado. Es decir, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, $f(a) < f(b)$ es cerrado y acotado.

2.1.3. Función Monótona

Definición 2.1.3.–

1) Una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en A, es monótona cuando es creciente o decreciente en A.

2) Una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en A, es monótona estrictamente creciente en A, si y sólo si, para todo x_1, x_2 de A, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

3) Una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en A, es monótona estrictamente decreciente en A, si y sólo si, para todo x_1, x_2 de A, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

4) Una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en A, es monótona no decreciente en A, si y sólo si, para todo x_1, x_2 de A, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

5) Una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en A, es monótona no creciente en A, si y sólo si, para todo x_1, x_2 de A, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$.

2.1.4. Función Escalonada

Definición 2.1.4.–

Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en $[a, b]$ y sea

$P = \{ a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n = b \}$,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ una partición de $[a, b]$.

La función f se llama escalonada, si y sólo si, $f(x) = c_k$, $c_k \in \mathbb{R}$, para cada x de $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.1.5. Partición de un Conjunto

Definición 2.1.5.1.–

Sea el intervalo acotado y cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$.

1) Se llama partición del intervalo $[a, b]$ a un conjunto ordenado y finito de puntos (o números reales)

   $P = \{ a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}, x_n = b \}$ de $[a ; b]$,

   tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

2) La partición P divide al intervalo $[a, b]$ en n intervalos más pequeños

   $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, cada uno de longitud

   $x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

   Esto es: $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{k-1}, x_k] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$

   $$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$$

3) La norma de la partición P, denotado por $\|P\|$ es el número real

   $\|P\| = \max \{x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, \ldots, n.\}$.

4) El conjunto de todas las particiones de un intervalo cerrado $[a, b]$ se denota por el conjunto $\mathbb{P}[a, b] = \{ P : P \text{ es partición de } [a, b] \}$.

5) Dadas dos particiones P_1 y P_2 de un mismo intervalo [a , b], se dice que P_2 es más fina que P_1, si $P_1 \subset P_2$.

Definición 2.1.5.2.–

Sea $f : [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en [a , b] y sea $P \in \mathbb{P}\,[a\ ,\ b]$,

$P = \{\ a = x_0\ , x_1\ , x_2\ , \ldots , x_{k-1}\ , x_k\ , \ldots , x_{n-1}\ ,\ x_n = b\ \}$ una partición de [a , b].

La función f es también acotada en cada intervalo $I_k = [x_{k-1}\ , x_k]$,

k = 1, 2, . . . , n.

2.1.6. Ínfimo y Supremo de una Función

Definición 2.1.6.–

Sea $f : [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en [a , b] y sea $P \in \mathbb{P}\,[a\ ,\ b]$,

$P = \{\ a = x_0\ , x_1\ , x_2\ , \ldots , x_{k-1}\ , x_k\ , \ldots , x_{n-1}\ ,\ x_n = b\ \}$ una partición de [a , b].

1) El ínfimo (o inferior) de la función f en el intervalo

   $[x_{k-1}\ , x_k]$, k = 1, 2, . . . , n está definido como el valor

   $m_k = m_k(f) = \inf\ \{\ f(x) :\ x \in [x_{k-1}\ , x_k]\ \}$, k = 1, 2, . . . , n.

2) El supremo (o superior) de la función f en el intervalo

   $[x_{k-1}\ , x_k]$, k = 1, 2, . . . , n está definido como el valor

   $M_k = M_k(f) = \sup\ \{\ f(x) :\ x \in [x_{k-1}\ , x_k]\ \}$, k = 1, 2, . . . , n.

2.1.7. Suma Inferior y Suma Superior de una Función

Definición 2.1.7.–

Sea $f : [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en [a , b] y sea $P \in \mathbb{P}\,[a\ ,\ b]$,

$P = \{\ a = x_0\ , x_1\ , x_2\ , \ldots , x_{k-1}\ , x_k\ , \ldots , x_{n-1}\ ,\ x_n = b\ \}$ una partición de [a , b].

1) La suma inferior de la función f con respecto a la partición P, se define como el valor

   $I\,(f\,, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}\,)$.

2) La suma superior de la función f con respecto a la partición P, se define como el valor

$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$.

2.1.8. Propiedades de las Sumas Inferiores y Superiores

Proposición 2.1.8.–

Sea $f : [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a\ ,\ b]$ y sea $\mathbb{P}[a\ ,\ b]$ el conjunto de particiones de $[a\ ,\ b]$. Entonces:

1) Si P es una partición cualquiera de $[a , b]$, $P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b]$, entonces

$I(f , P) \leq S(f , P)$.

2) Si P y Q son dos particiones de $[a , b]$, $P, Q \in \mathbb{P}[a\ ,\ b]$, tal que $P \subset Q$ (Q es más fina que P), entonces:

a) $I(f , P) \leq I(f , Q)$

b) $S(f , Q) \leq S(f , P)$

3) Si P y Q son dos particiones cualesquiera de $[a , b]$, $P, Q \in \mathbb{P}[a\ ,\ b]$ entonces $I(f , P) \leq S(f , Q)$.

Demostración

Sea $f : [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a\ ,\ b]$ y sea $P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b]$,

$P = \{ a = x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_{k-1} , x_k , \ldots , x_{n-1} , x_n = b \}$,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

una partición de $[a\ ,\ b]$, de modo que la función f es acotado en cada intervalo $[x_{k-1} , x_k]$, $k = 1, 2, \ldots , n$.

1) Demostrar que $I(f , P) \leq S(f , P)$

En efecto:

En cada intervalo $[x_{k-1} , x_k]$ se define:

El ínfimo de f : $m_k = m_k(f) = \inf \{ f(x) : x \in [x_{k-1} , x_k] \}$, $k = 1, 2, \ldots , n$ y

El supremo de f: $M_k = M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

de modo que se cumple: $m_k(f) \leq M_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$m_k \leq M_k$ (El ínfimo no es mayor que el supremo)

Entonces $m_k(x_k - x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Como $\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = I(f, P)$ y $\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = S(f, P)$,

entonces $I(f, P) \leq S(f, P)$.

Por tanto se cumple $I(f, P) \leq S(f, P)$

2) Sea $Q \in \mathbb{P}[a, b]$, tal que $Q = P \cup \{c\}$ una partición de $[a, b]$ que tiene un elemento más que P, $P \subset Q$. (Q es más fina que P)

Sea $Q = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, c, x_k, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < c < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Sean: $m_k = m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

$m' = m'(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\}$

$m'' = m''(f) = \inf\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$

donde $m_k \leq m'$, $m_k \leq m''$ o $m' \geq m_k$, $m'' \geq m_k$

Sean: $M_k = M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

$M' = M'(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\}$

$M'' = M''(f) = \sup\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$

donde $M' \leq M_k$, $M'' \leq M_k$ o $M_k \geq M'$, $M_k \geq M''$

a) Demostrar que $I(f, P) \leq I(f, Q)$

$m' \geq m_k$ entonces $m'(c - x_{k-1}) \geq m_k(c - x_{k-1})$

$m'' \geq m_k$ entonces $m''(x_k - c) \geq m_k(x_k - c)$

Entonces $m'(c - x_{k-1}) + m''(x_k - c) \geq m_k(c - x_{k-1}) + m_k(x_k - c)$

$m'(c - x_{k-1}) + m''(x_k - c) \geq m_k(c - x_{k-1} + x_k - c)$

$m'(c - x_{k-1}) + m''(x_k - c) \geq m_k(x_k - x_{k-1})$

Sean: $I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$,

$$I(f, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i (x_i - x_{i-1}) + m'(c - x_{k-1}) + m''(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

entonces:

$$I(f, Q) - I(f, P) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i (x_i - x_{i-1}) + m'(c - x_{k-1}) + m''(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$m'(c - x_{k-1}) + m''(x_k - c) \geq m_k(x_k - x_{k-1})$ entonces:

$$I(f, Q) - I(f, P) \geq \sum_{i=1}^{k-1} m_i (x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$I(f, Q) - I(f, P) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$I(f, Q) - I(f, P) \geq 0$$

Por tanto: $I(f, P) \leq I(f, Q)$.

b) Demostrar que $S(f, Q) \leq S(f, P)$

$M' \leq M_k$, $M'(c - x_{k-1}) \leq M_k(c - x_{k-1})$

$M'' \leq M_k$, $M''(x_k - c) \leq M_k(x_k - c)$

Entonces $M'(c - x_{k-1}) + M''(x_k - c) \leq M_k(c - x_{k-1}) + M_k(x_k - c)$

$$M'(c - x_{k-1}) + M''(x_k - c) \leq M_k(c - x_{k-1} + x_k - c)$$

$$M'(c - x_{k-1}) + M''(x_k - c) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$$

Sean: $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$,

$$S(f, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M'(c - x_{k-1}) + M''(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Entonces:

$$S(f, Q) - S(f, P) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M'(c - x_{k-1}) + M''(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$M'\,(c - x_{k-1}) + M''\,(x_k - c) \leq M_k\,(x_k - x_{k-1})$ entonces:

$S(f, Q) - S(f, P) \leq \sum_{i=1}^{k-1} M_i\,(x_i - x_{i-1}) + M_k\,(x_k - x_{k-1}) +$

$$\sum_{i=k+1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$S(f, Q) - S(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$

$S(f, Q) - S(f, P) \leq 0$

Por tanto: $S(f, Q) \leq S(f, P)$.

3) Sean P y Q dos particiones cualesquiera de [a , b], $P,Q \in \mathbb{P}\,[a\,,\,b]$.

demostrar que $I(f, P) \leq S(f, Q)$.

En efecto:

Sean P y Q dos particiones cualesquiera de [a , b], $P,Q \in \mathbb{P}\,[a\,,\,b]$, de modo que

$P \subset P \cup Q$, $Q \subset P \cup Q$.

$f : [a\,,\,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada en [a , b],

entonces, aplicando la parte 2) a) y la parte 1), se tiene:

$I(f, P) \leq I(f, P \cup Q)$, $I(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q)$

de donde $I(f, P) \leq S(f, P \cup Q)$

Como $Q \subset P \cup Q$, entonces aplicando la parte 2) b). se tiene:

$S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q)$

Luego $I(f, P) \leq S(f, Q)$.

2.1.9. Integral Inferior e Integral Superior de una Función

Definición 2.1.9.–

Sea $f : [a\,,\,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en [a , b] y sea $P \in \mathbb{P}\,[a\,,\,b]$ una partición de [a , b].

La integral inferior de la función f en [a , b] se define como el número real

$$\underline{S} = \int_a^b f(x)\,dx = \sup\,\{\, I(f, P),\ P \in \mathbb{P}\,[a\,,b] \,\}\,.$$

La integral superior de la función f en [a , b] se define como el número real

$\overline{S} = \int_a^b f(x)\, dx = \inf \{ S(f , P),\ P \in \mathbb{P} [a , b] \}$.

Proposición 2.1.2.–

Sea $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a , b]$, y sean

$\underline{S} = \int_a^b f(x)\, dx$, $\overline{S} = \int_a^b f(x)\, dx$ integral inferior y superior de la función

f respectivamente, entonces $\underline{S} \leq \overline{S}$.

<u>Demostración</u>

Sean $P, Q \in \mathbb{P} [a , b]$ dos particiones cualesquiera de $[a , b]$, entonces por la proposición 2.1.8, parte 3, se tiene $I (f , P) \leq S (f , Q)$, entonces $S(f , Q)$ es una cota superior del conjunto $\{ I (f , P) : P \in \mathbb{P} [a , b] \}$ entonces

$S(f , Q) \geq \sup \{ I (f , P) : P \in \mathbb{P} [a , b] \}$

Pero $\sup \{ I (f , Q) : P \in \mathbb{P} [a , b] \} = \underline{S}$, entonces

$S(f , Q) \geq \underline{S}$ o $\underline{S} \leq S(f , Q)$, esto implica que $\underline{S}$ es una cota inferior del conjunto

$\{ S (f , Q) : Q \in \mathbb{P} [a , b] \}$, entonces

$\underline{S} \leq \inf \{ S (f , Q) : Q \in \mathbb{P} [a , b] \}$

Pero $\inf \{ S (f , Q) : Q \in \mathbb{P} [a , b] \} = \overline{S}$, entonces $\underline{S} \leq \overline{S}$.

De donde, se deduce que $\overline{S} - \underline{S} \geq 0$

2.1.10. Integral de Riemann

Definición 2.1.10.–

Sea $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a , b]$. La función f es Riemann integrable en $[a , b]$, si y sólo si, la integral inferior de la función f es igual a la integral superior de la función f, es decir $\underline{S} = \overline{S}$.

Esto es:

Una función $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada en $[a , b]$, es Riemann integrable,

si y sólo si,

$\underline{S} = \int_a^b f(x)\,dx = \sup\{ I(f,P),\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b]\} = \inf\{ S(f,P),\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b]\} = \overline{S}$

2.1.11. Existencia de la Integral de Riemann

Para establecer las coincidencias y las diferencias entre las integrales de Riemann y de Lebesgue, es necesario establecer qué tipo de funciones son Integrables Riemann y qué tipo de funciones son Integrables Lebesgue.

Primeramente, estableceremos las funciones que son Integrables Riemann: Funciones acotadas, funciones continuas, funciones monótonas y funciones que tienen discontinuidades en un número finito de puntos.

Sea $f : [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en el intervalo cerrado y acotado $[a\ ,\ b]$ y sea $P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b]$ una partición de $[a , b]$, entonces los conjuntos

$\{ I(f , P) :\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b] \}$ y $\{ S(f , P) :\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b] \}$ son no vacíos.

El conjunto $\{ I(f , P) :\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b] \}$ está acotado superiormente por cualquier suma superior $S(f , P)$ y el conjunto $\{ S(f , P) :\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b] \}$ está acotado inferiormente por cualquier suma inferior $I(f , P)$.

Por tanto, $\sup\{ I(f , P) :\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b] \} \leq \inf\{ S(f , P) :\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b] \}$

El extremo superior del conjunto $\{ I(f , P) :\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b] \}$ es menor o igual que el extremo inferior del conjunto $\{ S(f , P) :\ P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b] \}$.

Teorema 2.1.1.–

Una función $f :\ [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada en el intervalo cerrado y acotado $[a\ ,\ b]$, es integrable Riemann en el intervalo $[a , b]$, si y sólo si, para cada número real $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \in \mathbb{P}[a\ ,\ b]$ del intervalo $[a , b]$, tal que

$0 < S(f , P) - I(f , P) < \varepsilon$.

<u>Demostración</u>

Sea $f :\ [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[a\ ,\ b]$.

a) Supongamos que la función f es integrable Riemann en [a , b], demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \in \mathbb{P}[a , b]$ del intervalo

$[a , b]$, tal que $0 < S(f , P) - I(f , P) < \varepsilon$.

En efecto:

Supongamos que la función f es integrable Riemann en $[a , b]$, entonces:

Integral inferior de la función f = Integral superior de la función f = $\int_a^b f(x)\,dx$.

Es decir:

supremo de las sumas inferiores de f = ínfimo de las sumas superiores de f =

$\int_a^b f(x)\,dx$.

$\underline{S} = \overline{S} = \int_a^b f(x)\,dx$

Como supremo de las sumas inferiores de f = $\int_a^b f(x)\,dx$,

ínfimo de las sumas superiores de f = $\int_a^b f(x)\,dx$, entonces

$\int_a^b f(x)\,dx$ – cualquiera de las sumas inferiores de f y

cualquiera de las sumas superiores de f – $\int_a^b f(x)\,dx$

es un número real pequeño.

Entonces, dado un número real $\varepsilon > 0$, existen particiones P_1 y P_2 de $[a , b]$, tales

que $\int_a^b f(x)\,dx - I(f , P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $S(f , P_2) - \int_a^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$

Sea $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 \subset P$ y $P_2 \subset P$.

Entonces $I(f , P_1) \leq I(f , P)$ y $S(f , P) \leq S(f , P_2)$ (Proposición 2.1.8)

$I(f , P_1) \leq I(f , P)$ entonces $-I(f , P) \leq -I(f , P_1)$,

$\int_a^b f(x)\,dx - I(f , P) \leq \int_a^b f(x)\,dx - I(f , P_1)$

Pero $\int_a^b f(x)\,dx - I(f , P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx - I(f , P) < \frac{\varepsilon}{2}$

$S(f , P) \leq S(f , P_2)$ entonces $S(f , P) - \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f , P_2) - \int_a^b f(x)\,dx$

Pero $S(f , P_2) - \int_a^b f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$ entonces $S (f , P) - \int_a^b f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$

$S (f , P) - \int_a^b f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\int_a^b f(x)\, dx - I (f , P) < \frac{\varepsilon}{2}$ entonces

$S (f , P) - \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, dx - I (f , P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$S (f , P) - I (f , P) < \varepsilon$.

b) Supongamos que para cada número real $\varepsilon > 0$, existe una parición

P de $[a , b]$, tal que $S (f , P) - I (f , P) < \varepsilon$, demostrar que la

función $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann.

En efecto:

Supongamos que dado un número real $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \in \mathbb{P}[a , b]$ de $[a , b]$, tal que $S(f , P) - I(f , P) < \varepsilon$.

Se sabe que :

Integral inferior de f = sup { I(f , P) : $P \in \mathbb{P}[a , b]$ } ,

$$\underline{S} = \sup \{ I(f , P) : P \in \mathbb{P}[a , b] \}$$

Entonces:

Integral inferior de f $\geq$ cualquiera de las sumas inferiores de f

Integral inferior de f $\geq$ I(f , P)

Es decir $\underline{S} \geq I(f , P)$, entonces $\underline{S} - I (f , P) \geq 0$, $0 \leq \underline{S} - I (f , P)$

De la misma manera:

Integral superior de f = ínf { S (f , P) : $P \in \mathbb{P}[a , b]$ } ,

$$\overline{S} = \inf \{ S (f , P) : P \in \mathbb{P}[a , b] \}$$

Entonces:

Integral superior de f $\leq$ cualquiera de las sumas superiores de f

Integral superior de f $\leq$ S (f , P)

Es decir $\overline{S} \leq S (f , P)$, de donde

$0 \leq S(f, P) - \overline{S}$

Como $0 \leq \underline{S} - I(f, P)$, $0 \leq S(f, P) - \overline{S}$ entonces

$0 \leq \underline{S} - I(f, P) + S(f, P) - \overline{S}$

$0 \leq \underline{S} - \overline{S} + S(f, P) - I(f, P)$,

$\overline{S} - \underline{S} \leq S(f, P) - I(f, P)$

Pero $\overline{S} - \underline{S} \geq 0$, $0 \leq \overline{S} - \underline{S}$, entonces

$0 \leq \overline{S} - \underline{S} \leq S(f, P) - I(f, P)$

Pero $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ entonces

$0 \leq \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, entonces $\overline{S} - \underline{S} = 0$.

De donde $\underline{S} = \overline{S} = \int_a^b f(x)\, dx$

Luego la función f es integrable Riemann en [a , b].

Teorema 2.1.2.–

Toda función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un intervalo acotado y cerrado $[a, b]$ es integrable Riemann en el intervalo $[a, b]$.

Demostración.

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$ un intervalo acotado y cerrado, entonces $[a, b]$ es compacto.

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, entonces f es acotada en $[a, b]$, f es uniformemente continua en $[a, b]$ y $f([a, b])$ es cerrado, acotado y compacto.

Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y para demostrar el teorema bastará verificar la condición de Riemann del teorema anterior.

Si $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua en $[a , b]$, entonces dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para cualesquier x, y de $[a , b]$, si $|x - y| < \delta$ entonces $| f(x) - f(y) | < \varepsilon$.

Sea $P \in \mathbb{P}[a , b]$, $P = \{ a = x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_{k-1} , x_k , \ldots , x_{n-1} , x_n = b \}$,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ una partición de $[a , b]$, con norma $\| P \| = \max \{ x_k - x_{k-1} \} < \delta$, $k = 1, 2, \ldots , n$, entonces

$\| P \| < \delta$, $x_k - x_{k-1} < \delta$.

La longitud de cada intervalo $[x_{k-1} , x_k]$ es

$l ([x_{k-1} , x_k]) = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, \ldots , n$.

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a , b]$, entonces f es continua en cada uno de los intervalos cerrados $[x_{k-1} , x_k]$, $k = 1, 2, \ldots , n$, entonces la función f tiene un supremo $M_k = f(x_i)$ y un ínfimo $m_k = f(x_r)$, donde $x_i , x_r \in [x_{k-1} , x_k]$, $k = 1, 2, \ldots , n$.

Si la función f es continua en $[x_{k-1} , x_k]$, $k = 1, 2, \ldots , n$, entonces f es uniformemente continua en $[x_{k-1} , x_k]$, $k = 1, 2, \ldots , n$, entonces dado un valor $\varepsilon' > 0$, con $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$, existe un $\delta > 0$, tal que $| x_i - x_r| < \delta$ entonces

$| f(x_i) - f(x_r) | < \varepsilon'$, entonces $x_i - x_r < \delta$, $f(x_i) - f(x_r) < \varepsilon'$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Si definimos las sumas inferior y superior

$I(f , P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$ y $S(f , P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$, entonces

$$S(f , P) - I(f , P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S(f , P) - I(f , P) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) (x_k - x_{k-1})$$

$$S(f , P) - I(f , P) = \sum_{k=1}^{n}(f(x_i) - f(x_r)) (x_k - x_{k-1})$$

Pero $f(x_i) - f(x_r) < \varepsilon'$, entonces $S(f , P) - I(f , P) < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon' (x_k - x_{k-1})$

$$S(f , P) - I(f , P) < \varepsilon' \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

Pero $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b-a$ y $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$, entonces

$S(f, P) - I(f, P) < \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)(b-a)$, entonces $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

Entonces por el Teorema 2.1.1 se cumple la condición de Riemann.

Luego la función f es integrable Riemann en el intervalo [a , b].

Teorema 2.1.3.–

Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función monótona en el intervalo acotado y cerrado $[a, b]$, entonces la función f es integrable Riemann en el intervalo $[a, b]$.

Demostración

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$ un intervalo real acotado y cerrado.

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona en el intervalo $[a, b]$, entonces la función f es monótona creciente o monótona decreciente en el intervalo $[a, b]$.

Supongamos que $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función monótona creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces para cualesquier x_1, x_2 de $[a, b]$, si $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ y la función f está acotada inferiormente por $f(a)$ y acotada superiormente por $f(b)$, de modo que $f(a) < f(b)$, esto implica que la función f es acotada en $[a, b]$, entonces $m(f) = \inf\{ f(x), x \in [a, b] \} = f(a)$ y $M(f) = \sup\{ f(x), x \in [a, b] \} = f(b)$. Entonces la función f es integrable en el intervalo [a , b] . Para demostrar el teorema bastará verificar la condición de Riemann.

En efecto:

Dado un $\varepsilon > 0$ y eligiendo el valor de n suficientemente grande $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, se define la relación $(b-a)(f(b) - f(a)) < n\,\varepsilon$.

Sea $P \in \mathbb{P}[a, b]$, $P = \{ a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_{n-1}, x_n = b \}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$, de modo que cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ tiene igual longitud

$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, k = 1, 2, . . . , n.

Si la función f es monótona creciente en el intervalo cerrado [a , b] , entonces la función f es monótona creciente en cada intervalo cerrado $[x_{k-1}, x_k]$, k = 1, 2, . . . , n de la partición , entonces el supremo y el ínfimo de la función f en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, k = 1, 2, . . . , n es :

Supremo $M_k = M_k(f) = \sup\{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \} = f(x_k)$, k = 1, 2, . . . , n

Ínfimo $m_k = m_k(f) = \inf\{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \} = f(x_{k-1})$, k = 1, 2, . . . , n

De la misma manera definimos:

Suma inferior $I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$ y

Suma superior $S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$

Entonces:

$S(f, P) - I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$

$S(f, P) - I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$

Pero $M_k = f(x_k)$, $m_k = f(x_{k-1})$ y $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, k = 1, 2, . . . , n ,

entonces $S(f, P) - I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$$S(f, P) - I(f, P) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

Pero f(b) es cota superior y f(a) es cota inferior de la función f en [a , b] , entonces

$\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a)$,

$S(f, P) - I(f, P) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a))$

Como $(b - a)(f(b) - f(a)) < n\,\varepsilon$, $\left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a)) < \varepsilon$

Entonces $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

Entonces por Teorema de la condición de Riemann, la función f es integrable Riemann en el intervalo cerrado [a , b].

En forma análoga se demuestra, el caso cuando la función f es monótona decreciente en el intervalo cerrado [a , b].

En efecto:

Supongamos que $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona decreciente en el intervalo cerrado $[a , b]$, entonces para cualesquier x_1 , x_2 de $[a ,b]$, si $x_1 < x_2$, $f(x_2) < f(x_1)$ y la función f está acotada inferiormente por $f(b)$ y acotada superiormente por $f(a)$, de modo que $f(a) > f(b)$, $f(a) – f(b) > 0$.

$b – a > 0$, entonces

$m(f) = \inf\{ f(x) , x \in [a , b] \} = f(b)$ y $M(f) = \sup \{ f(x) , x \in [a , b] \} = f (a)$.

Dado un $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, se define la relación $(b – a) (f(a) – f(b)) < n \varepsilon$.

Sea $P \in \mathbb{P} [a , b]$, $P = \{ a = x_0 , x_1 , x_2 , . . . , x_{k-1} , x_k , . . . , x_{n-1} , x_n = b \}$,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < . . . < x_{k-1} < x_k < . . . < x_{n-1} < x_n = b$ una partición del intervalo $[a , b]$, de modo que cada intervalo $[x_{k-1} , x_k]$, $k = 1, 2, . . . , n$ tiene igual longitud

$x_k – x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, . . . , n$.

Si la función f es decreciente en el intervalo cerrado $[a , b]$, entonces la función f es decreciente en cada intervalo cerrado $[x_{k-1} , x_k]$, $k = 1, 2, . . . , n$ de la partición.

El supremo y el ínfimo de la función f en cada intervalo $[x_{k-1} , x_k]$,

$k = 1, 2, . . . , n$ es :

$M_k = M_k (f) = \sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1} , x_k] \} = f(x_{k-1})$, $k = 1, 2, . . . , n$

$m_k = m_k (f) = \inf \{ f(x) : x \in [x_{k-1} , x_k] \} = f(x_k)$, $k = 1, 2, . . . , n$

$f(x_{k-1}) > f(x_k)$, $f(x_{k-1}) - f(x_k) > 0$.

Suma inferior $I(f , P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$ y

Suma superior $S(f , P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$

Entonces:

$S(f , P) – I(f , P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$

$S(f , P) – I(f , P) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$

Pero $M_k = f(x_{k-1})$, $m_k = f(x_k)$ y $x_k – x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, . . . , n$,

entonces $S(f , P) – I(f , P) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) \left(\frac{b-a}{n}\right)$

$$S(f , P) – I(f , P) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) - f(x_k))$$

Pero f(a) es cota superior y f(b) es cota inferior de la función f en [a , b] , entonces

$\sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) = f(a) - f(b)$.

Entonces $S(f , P) – I(f , P) = \left(\frac{b-a}{n}\right) (f(a) – f(b))$

Como $(b – a) (f(a) – f(b)) < n\,\varepsilon$, $\left(\frac{b-a}{n}\right) (f(a) – f(b)) < \varepsilon$

Entonces $S(f , P) – I(f , P) < \varepsilon$.

Entonces la función f es integrable Riemann en el intervalo cerrado [a , b].

Teorema 2.1.4.–

Sea $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en [a , b] y

sea $D = \{ d_j \in [a , b] :$ f es discontinua en d_j , $j = 1, 2, . . . , m \}$ un conjunto finito de discontinuidades de la función f en [a , b] , con $d_1 < d_2 < . . . < d_m$, $a = d_0$, $d_{m+1} = b$. Entonces la función f es integrable Riemann en [a , b] y

$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m+1} \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(x)\,dx$.

<u>Demostración</u>

Sea $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en [a , b] .

Sea $D = \{ d_j \in [a , b] :$ f es discontinua en d_j , $j = 1, 2, . . . , m \}$ un conjunto finito de discontinuidades de la función f en [a , b] , con $d_1 < d_2 < . . . < d_m$, $a = d_0$, $d_{m+1} = b$.

Si la función $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada en [a , b] , entonces existe k > 0, tal que $| f(x) | \le k$, para todo $x \in [a , b]$, $– k \le f(x) \le k$.

Supongamos que el conjunto $D = \emptyset$, entonces la función f es continua en $[a , b]$, entonces la función f es integrable en $[a , b]$.

Supongamos que la función f es discontinua en b (o en a) y sea $D = \{ b \}$, entonces para todo $c < b$, f es continua en el intervalo $[a , c]$, entonces f es integrable en $[a , c]$.

Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P' \in \mathbb{P}[a , c]$, tal que

suma superior – suma inferior $< \frac{\varepsilon}{2}$,

$S(f , P') - I(f , P') < \frac{\varepsilon}{2}$ y sea $k (b - c) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Añadiendo b a la partición P', se determina una partición de $[a , b]$,

$P = \{ b \} \cup P' \in \mathbb{P}[a , b]$.

Se define la suma superior y la suma inferior para la partición P :

Suma superior: $S(f , P) = S(f , P') + \sup\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c)$

$| f(x) | \leq k$, $\forall x \in [a , b]$, de donde $-k \leq f(x) \leq k$, entonces

$\sup\{ f(x) : x \in [c , b] \} \leq k$, entonces $\sup\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c) \leq k (b - c)$

entonces $\sup\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c) < \frac{\varepsilon}{4}$,

entonces $S(f , P') + \sup\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c) < S(f , P') + \frac{\varepsilon}{4}$

Entonces $S(f , P) < S(f , P') + \frac{\varepsilon}{4}$

Suma inferior : $I(f , P) = I(f , P') + \inf\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c)$

$-k \leq f(x) \leq k$, entonces $\inf\{ f(x) : x \in [c , b] \} \geq -k$ entonces

$\inf\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c) \geq -k (b - c)$

$-\inf\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c) \leq k (b - c)$, $k (b - c) < \frac{\varepsilon}{4}$ entonces

$-\inf\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c) < \frac{\varepsilon}{4}$ entonces

$-I(f , P') - \inf\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c) < -I(f , P') + \frac{\varepsilon}{4}$

$-I(f , P) = -I(f , P') - \inf\{ f(x) : x \in [c , b] \} (b - c)$, entonces

$-\,I(f\,,P) \;<\; -\,I(f\,,P') \;+\; \frac{\varepsilon}{4}$

Entonces : $S(f\,,P) \;+ (-\;I(f\,,P)\,) \;<\; (\,S(f\,,P') + \frac{\varepsilon}{4}\;) \;+\; (-\,I(f\,,P') \;+\; \frac{\varepsilon}{4}\;)$

$S(f\,,P) \;-\; I(f\,,P) \;<\; S(f\,,P') \;-I(f\,,P') \;+\; \frac{\varepsilon}{2}$,

$S(f\,,P') \;-\; I(f\,,P') \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $S(f\,,P) \;-\; I(f\,,P) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \;+\; \frac{\varepsilon}{2}$

Entonces $S(f\,,P) - I(f\,,P) \;<\; \varepsilon$.

En forma análoga se demuestra cuando la función f es discontinua en el extremo a. Entonces la función f es integrable en [a , b].

Supongamos que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función f en el intervalo [a , b] es $D = \{\, d_1\,,\; d_2\,, \ldots, d_{j-1}\,,\; d_j\,, \ldots,\; d_m \;\}$, con

$d_1 \;<\; d_2 \;<\; \ldots < \; d_{j-1} \;<\; d_j \;< \ldots < d_m$, $a = d_0$, $d_{m+1} = b$.

Sea c_j un punto del intervalo $\langle\, d_{j-1}\;,\; d_j\,\rangle$, $c_j \in \langle\, d_{j-1}\;,\; d_j\,\rangle$, $j = 1, 2, \ldots, m+1$.

Aplicando el procedimiento anterior, la función f es integrable en los intervalos

$[d_{j-1}\,,\; c_j]$ y $[c_j\,,\; d_j]$, entonces

$$\int_{d_{j-1}}^{d_j} f(x)\,dx \;=\; \int_{d_{j-1}}^{c_j} f(x)\,dx \;+\; \int_{c_j}^{d_j} f(x)\,dx$$

Del resultado anterior se deduce, que la función f es integrable en el intervalo

$[d_0\,,\; d_1]$ y también en el intervalo $[d_1\,,\; d_2]$, entonces la función f es integrable en el intervalo $[d_0\,,\; d_2]$ y

$$\int_{d_0=a}^{d_2} f(x)\,dx \;=\; \int_{d_0=a}^{d_1} f(x)\,dx \;+\; \int_{d_1}^{d_2} f(x)\,dx$$

$$\int_{d_0=a}^{d_2} f(x)\,dx \;=\; \sum_{j=1}^{2} \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(x)\,dx$$

Siguiendo el procedimiento, se deduce que la función f es integrable en el intervalo

$[d_0\,,\; d_{m+1}] \;=\; [a\,,b]$ y

$$\int_{d_0=a}^{d_{m+1}} f(x)\,dx \;=\; \sum_{j=1}^{m+1} \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(x)\,dx$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m+1} \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(x)\,dx$.

De los teoremas expuestos y demostrados, se deducen que la integral de Riemann es aplicable a las funciones acotadas, funciones continuas, funciones monótonas y funciones que tienen un número finito de discontinuidades.

2.1.12. Propiedades de la Integral de Riemann

Proposición 2.1.3.–

1) Sean $f , g : [a , b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables Riemann y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $f + g$ y αf son funciones integrables Riemann en $[a , b]$.

   a) $\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$

   b) $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$

2) Sean $f , g : [a , b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas en $[a , b]$.

   a) Si f es monótona en $[a , b]$, entonces f es integrable Riemann en $[a , b]$.

      i) Si $f \geq 0$ entonces $\int_a^b f\,dx \geq 0$.

      ii) Si $f \leq g$ entonces $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$

   b) Si f es continua en $[a , b]$, entonces f es integrable Riemann en $[a , b]$.

   c) Si f es integrable Riemann en $[a , b]$, entonces $|f|$ es integrable Riemann en $[a , b]$ y $\left| \int_a^b f\,dx \right| \leq \int_a^b |f|\,dx$

2.2. Integral de Lebesgue

Para definir la integral de Lebesgue, es necesario conocer un conjunto de conceptos previamente.

2.2.1. Intervalos Reales

Definición 2.2.1.–

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$.

Se llama intervalo real de $\mathbb{R}$, a cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$[a , b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$ intervalo cerrado.

$\langle a , b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$ intervalo abierto.

$[a , b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \}$ intervalo semiabierto.

$\langle a , b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \}$ intervalo semiabierto.

$[a , a] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq a \}$ se llama intervalo degenerado.

El subconjunto vacío $\emptyset$ de $\mathbb{R}$ es un intervalo.

$\langle a , a \rangle = \emptyset$ conjunto vacío.

También se llaman intervalos de $\mathbb{R}$ los siguientes conjuntos:

$[a , + \infty \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a \}$

$\langle a , + \infty \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : x > a \}$

$\langle -\infty , a] = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq a \}$

$\langle -\infty , a \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : x < a \}$

El conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}$ denotamos por:

$\mathbb{I} = \{ I \subset \mathbb{R} : I \text{ es un intervalo de } \mathbb{R} \}$

2.2.2. Medida de Intervalos Reales

Definición 2.2.2.–

Sea $\mathbb{I} = \{ I \subset \mathbb{R} : I \text{ es un intervalo de } \mathbb{R} \}$ el conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}$.

Se llama medida o longitud del intervalo real I, a una función

$m : \mathbb{I} \rightarrow [0 , + \infty]$ que asocia a cada intervalo $I \in \mathbb{I}$ un único número real no negativo $m (I) \in [0 , + \infty]$.

Si I es un intervalo (cerrado, abierto o semiabierto) de extremos a y b, con $a \leq b$, entonces la medida o longitud del intervalo I está definida por

$m(I) = b - a.$

La medida del intervalo $I = [a , a]$ es $m (I) = 0.$

La medida de los intervalos $I = [a , + \infty \rangle$, $I = \langle \mathbf{a} , + \infty \rangle$, $I = \langle -\infty , a]$,

$I = \langle -\infty , \mathbf{a} \rangle$ es $m(I) = +\infty$.

La medida del intervalo $\langle a , a \rangle = \emptyset$ es $m(\emptyset) = 0$.

$m(\mathbb{R}) = +\infty$

2.2.3. Propiedades de la Medida de Intervalos Reales

Proposición 2.2.3.–

1) Finitamente aditiva (o aditividad numerable)

Si $I_1 , I_2 \in \mathbb{I}$, tal que $I_1 \cap I_2 = \phi$, entonces $m(I_1 \cup I_2) = m(I_1) + m(I_2)$.

En general, si $I_1 , I_2 , \ldots , I_k \in \mathbb{I}$ tal que $I_i \cap I_J = \phi$, $I_i \neq I_J$;

$i, j \in \{1 , 2 , \ldots , k\}$, entonces $m(\bigcup_1^k I_i) = \sum_{i=1}^{k} m(I_i)$.

2) Monotonía

Si $I_1 , I_2 \in \mathbb{I}$, tal que $I_1 \subset I_2$, entonces $m(I_1) \leq m(I_2)$.

3) Invarianza por traslaciones

Si $I \in \mathbb{I}$, $r \in \mathbb{R}$, entonces $m(I + r) = m(I)$.

2.2.4. Intervalos en $\mathbb{R}^{n}$

Definición 2.2.4.1.–

Un subconjunto I del conjunto $\mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}^n$, se llama intervalo de $\mathbb{R}^n$,

si y sólo si, existen intervalos de $\mathbb{R}$, I_1 , I_2 , . . . , I_n , de manera que

I es producto cartesiano de los intervalos I_1 , I_2 , . . . , I_n .

$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$

El conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}^n$ denotamos por:

$\mathbb{Y} = \{ I \subset \mathbb{R}^n : I \text{ es un intervalo de } \mathbb{R}^n \}$

Definición 2.2.4.2.–

Sea $\mathbb{Y} = \{ I \subset \mathbb{R}^n : I \text{ es un intervalo de } \mathbb{R}^n \}$ el conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}^n$. Se llama medida o volumen del intervalo real I, a una función

$m : \mathbb{Y} \rightarrow [0, +\infty]$ que asocia a cada intervalo $I \in \mathbb{Y}$ un único número real no negativo $m(I) \in [0, +\infty]$.

$m(I) = m(I_1)\ m(I_2)\ \ldots\ m(I_n)$

2.2.5. σ–Álgebra (Sigma Álgebra)

Definición 2.2.5.1.–

Sea X un conjunto no vacío, $X \neq \emptyset$, sea $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de todos los subconjuntos de X y sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de los subconjuntos de X,

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Se dice que la familia $\mathcal{A}$ es una **σ**–álgebra de subconjuntos de X , si y sólo si, cumple las siguientes condiciones:

1) ϕ, $X \in \mathcal{A}$

1) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, entonces $\mathbf{A^c} \in \mathcal{A}$, (ó $X - A \in \mathcal{A}$).

3) Si $(\mathbf{A_n})_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^+}$ es una familia numerable de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^+} \mathbf{A_n} \in \mathcal{A}$ y $\bigcap_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^+} \mathbf{A_n} \in \mathcal{A}$.

El conjunto X provisto de una **σ**–álgebra $\mathcal{A}$ se llama espacio medible y se denota por $(X, \mathcal{A})$.

Los elementos de una **σ**– álgebra $\mathcal{A}$ se llaman conjuntos medibles.

Como consecuencia de la definición anterior, se deduce la siguiente definición:

Definición 2.2.5.2.–

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible .

1) Si $\mathbf{A_k} \in \mathcal{A}$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $\bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{A_k} \in \mathcal{A}$, $\bigcap_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{A_k} \in \mathcal{A}$.

3) Si $(\mathcal{A}_\mathbf{i})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}}$ es una familia de **σ**– álgebras en X, entonces $\bigcap_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathcal{A}_\mathbf{i}$ es una **σ**– álgebra en X.

4) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A - B \in \mathcal{A}$.

Los siguientes conjuntos son **σ**– álgebras.

1) Los conjuntos { ∅ , X } y $\mathcal{P}$(X) son **σ**– álgebras en X.

2) Los conjuntos { ∅ , ℝ } y $\mathcal{P}$(ℝ) son **σ**– álgebras en ℝ .

3) Los conjuntos { ∅ , $\mathbb{R}^n$ } y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ son **σ**– álgebras en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2.5.3.–

Sea (X , $\mathcal{A}$) un espacio medible .

1) Si B ∈ $\mathcal{A}$, tal que B = $\bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{A_k}$, donde $\mathbf{A_k}$ ∈ $\mathcal{A}$, k = 1, 2, . . . , n ,

entonces el conjunto B se llama conjunto elemental.

2) Si B ∈ $\mathcal{A}$, tal que B = $\bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{A_k}$, donde $\mathbf{A_k}$ ∈ $\mathcal{A}$, k = 1, 2, . . . ,

entonces el conjunto B se llama conjunto **σ**– elemental .

2.2.6. *σ*–Álgebra Generada

Definición 2.2.6.–

Sea X un conjunto no vacío, sea $\mathcal{P}$(X) el conjunto potencia de X y sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{N} \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera de partes de X. La intersección de todas las **σ**–álgebras que contienen a $\mathcal{N}$ es una **σ**–álgebra que contiene a $\mathcal{N}$, llamada σ–álgebra generada (ó engendrada) por $\mathcal{N}$ y denotamos por **σ**($\mathcal{N}$).

σ($\mathcal{N}$) es la más pequeña **σ**–álgebra sobre X que contiene $\mathcal{N}$.

$\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{N}) = \bigcap_{i \in I} \{ \mathcal{A}_i : \mathcal{N} \subset \mathcal{A}_i , \ \forall\, i \in I \}$

2.2.7. *σ*– Álgebra de Borel

Definición 2.2.7.–

Sea X un conjunto no vacío, X≠ ∅ y sea (X ,T) un espacio topológico. La σ–álgebra generada por la topología T, se llama **σ**–álgebra de Borel y denotamos por B(X) o B(T) = σ(T), cuyos elementos se llaman conjuntos de Borel o simplemente borelianos.

Los conjuntos abiertos, los conjuntos cerrados, la intersección numerable de abiertos, unión numerable de cerrados son borelianos.

El par (X , B(T)) ó (X , σ(T)) se llama espacio medible de Borel.

La **σ**– álgebra generada por la familia de abiertos de $\mathbb{R}^n$, se llama **σ**– álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ y se denota por B ($\mathbb{R}^n$)

La **σ**– álgebra generada por la familia de abiertos de $\mathbb{R}$, se llama **σ**– álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ y se denota por B ($\mathbb{R}$) , que coincide con el **σ**–álgebra generada por cualquiera de los siguientes conjuntos :

1) El conjunto de los intervalos abiertos $E_1 = \{ \langle a , b \rangle : a < b \}$.

2) El conjunto de los intervalos cerrados $E_2 = \{ [a , b] : a < b \}$.

3) El conjunto de los intervalos semiabiertos $E_3 = \{ \langle a , b] : a < b \}$ ó

$E_4 = \{ [a , b \rangle : a < b \}$.

4) El conjunto de los intervalos de la forma $E_5 = \{ \langle a , +\infty \rangle : a \in \mathbb{R} \}$ ó

$E_6 = \{ \langle -\infty , a \rangle : a \in \mathbb{R} \}$.

5) El conjunto de los intervalos de la forma $E_7 = \{ [a , +\infty \rangle , a \in \mathbb{R} \}$ ó

$E_8 = \{ \langle -\infty , a] : a \in \mathbb{R} \}$.

2.2.8. Medida σ–Álgebra

Definición 2.2.8,1.–

Sea (X, $\mathcal{A}$) un espacio medible. Se llama medida **σ**– álgebra (ó medida no negativa) definida en (X, $\mathcal{A}$), a una función $\mu : \mathcal{A} \to [0 , +\infty]$

que cumple las siguientes condiciones:

1) $\mu(A) \geq 0 , \ \forall A \in \mathcal{A}$

2) $\mu(\emptyset) = 0$

3) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (aditividad finita)

En general, si $(\mathbf{A_i})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^+}$ es una familia numerable de elementos de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, disjuntas dos a dos, entonces $\boldsymbol{\mu}\,(\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^+}\mathbf{A_i}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\infty}\boldsymbol{\mu}\,(\mathbf{A_i})$. (σ–aditiva ó numerable aditiva)

El espacio medible (X, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$) provisto de una medida $\boldsymbol{\mu}$ se llama espacio de medida y se denota por $(X, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$.

Definición 2.2.8.2.–

Sea $(X, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida.

1) Si $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, tal que $\boldsymbol{\mu}\,(A) = 0$, se dice que A es un conjunto de medida cero.

2) Si $\boldsymbol{\mu}\,(X) < +\infty$, se dice que $\boldsymbol{\mu}$ es una medida finita.

   Si $\boldsymbol{\mu}\,(X) = 1$, se dice que $\boldsymbol{\mu}$ es una probabilidad.

3) Si $(\mathbf{A_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de elementos de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, tal que $X = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^+}\mathbf{A_n}$ y $\boldsymbol{\mu}\,(A_n) < +\infty$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, se dice que $\boldsymbol{\mu}$ es una medida $\boldsymbol{\sigma}$– finita.

4) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A_j} = \emptyset$, $\forall\, \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \in \{\mathbf{1, 2, \ldots, n}\}$ y $\boldsymbol{\mu}\,(\bigcup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{A_i}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\boldsymbol{\mu}\,(\mathbf{A_i})$, se dice que $\boldsymbol{\mu}$ es una medida finitamente aditiva.

5) Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $\mu\,(A) \leq \mu\,(B)$. (μ es monótona)

6) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ y $\mu\,(A) < +\infty$, entonces $\mu\,(B - A) = \mu\,(B) - \mu\,(A)$.

7) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\boldsymbol{\mu}\,(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}\,(A_i)$. (μ es subaditiva)

8) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión creciente de elementos de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\boldsymbol{\mu}\,(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}A_n) = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}\,(A_n)$.

   (continuidad creciente de la medida)

9) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión decreciente de elementos de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, con medida finita $\boldsymbol{\mu}\,(A_n) < +\infty$, entonces $\boldsymbol{\mu}\,(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+}A_n) = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}\,(A_n)$. (Continuidad decreciente de la medida)

Definición 2.2.8.3.–

Sea X un conjunto no vacío y sea la medida definida por la función

$\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mathcal{P}}(X) \rightarrow [\,0\,, +\infty\,]$, entonces

$$\boldsymbol{\mu}(A) = \begin{cases} \text{cardinal}(A), & \text{si A es finito.} \\ +\infty, & \text{si A es infinito.} \end{cases}$$

De acuerdo a la definición:

$\boldsymbol{\mu}(\mathbb{R}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbb{N}) = +\infty$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbb{R}^n) = +\infty$

2.2.9. Medida Exterior de Lebesgue y Medida de Lebesgue

Definición 2.2.9.1.–

Sea X un conjunto no vacío y sea $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$ el conjunto potencia de todos los subconjuntos de X. Se llama medida exterior de Lebesgue en X , a una función

$\boldsymbol{\mu}^* : \boldsymbol{\mathcal{P}}(X) \rightarrow [\,0\,, +\infty\,]$, tal que verifica :

1) $\boldsymbol{\mu}^*(\emptyset) = 0$

2) Si $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$, tal que $A \subset B$, entonces $\boldsymbol{\mu}^*(A) \leq \boldsymbol{\mu}^*(B)$. (monotonía)

3) Si $(\mathbf{A_k})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^+} \subset \boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$, entonces $\boldsymbol{\mu}^*\left(\bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{A_k}\right) \leq \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{A_k})$.

(numerable subaditiva)

Definición 2.2.9.2.–

Sea $(X, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida y sea $A \subset X$, tal que

$A \subset \bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{A_k}$, $\mathbf{A_k} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

La función $\boldsymbol{\mu}^* : \boldsymbol{\mathcal{P}}(X) \rightarrow [0\,, +\infty]$, definida por

$\boldsymbol{\mu}^*(A) = \inf\left\{ \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A_k}) \,,\; A \subset \bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{A_k} \,,\; \mathbf{A_k} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \right\}$

se llama medida exterior Lebesgue del conjunto A.

Sea $(X, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un espacio medible. Si $B \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ es un conjunto $\boldsymbol{\sigma}$– elemental , entonces la medida exterior de B es igual a la medida $\boldsymbol{\sigma}$– elemental de B.

$\boldsymbol{\mu}^*(B) = \boldsymbol{\mu}(B)$

2.2.10. Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Definición 2.2.10.–

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A : A \subset \mathbb{R}\}$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, sea $\{\mathbf{I_k}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^+}$ una familia numerable de intervalos de $\mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$, tal que

$A \subset \bigcup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^+} \mathbf{I_k}$. La medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es una función

$\boldsymbol{\mu}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [\,0\,, +\infty\,]$, definida por

$$\boldsymbol{\mu}^*(A) = \inf\left\{ \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{m}(\mathbf{I_k}) \;:\; A \subset \bigcup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^+} \mathbf{I_k}\,,\; \mathbf{I_k} \subset \mathbb{R} \right\} \in [\,0\,, +\infty\,].$$

2.2.11. Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.2.11.1.–

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R}^\mathbf{n}) = \{A : A \subset \mathbb{R}^\mathbf{n}\}$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^\mathbf{n}$, sea $\{\mathbf{I_n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^+}$ una familia numerable de intervalos de $\mathbb{R}^\mathbf{n}$ y $A \subset \mathbb{R}^\mathbf{n}$, tal que

$A \subset \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^+} \mathbf{I_n}$. La medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^\mathbf{n}$ es una función

$\boldsymbol{\mu}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^\mathbf{n}) \to [\,0\,, +\infty\,]$, definida por

$$\boldsymbol{\mu}^*(A) = \inf\left\{ \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{m}(\mathbf{I_n}) \;:\; A \subset \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^+} \mathbf{I_n}\,,\; \mathbf{I_n} \subset \mathbb{R}^\mathbf{n} \right\} \in [\,0\,, +\infty\,].$$

Proposición 2.2.3.–

Sea $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0\,, +\infty]$ una medida exterior en $\mathbb{R}$. Entonces:

1) μ^* es invariante por traslaciones.

   $\forall a \in \mathbb{R}\,, \forall A \subset \mathbb{R},\; a + A = \{a + x : x \in A\}\,,\; \mu^*(a + A) = \mu^*(A)$

2) μ^* es homotética.

   $\forall a \in \mathbb{R}\,, \forall A \subset \mathbb{R},\; a\,A = \{ax : x \in A\}\,,\; \mu^*(a\,A) = |a|\,\mu^*(A)$

3) Si $E \subset \mathbb{R}$, E es numerable, entonces $\mu^*(E) = 0$.

4) La medida exterior de un intervalo en $\mathbb{R}$ es igual a su longitud.

   Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces $\mu^*(I) = m(I)$

2.2.12. Conjunto Medible Lebesgue

Definición 2.2.12.1.–

Sea X un conjunto no vacío, sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X y sea

$\boldsymbol{\mu}^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [\,0\,, +\infty\,]$ la medida exterior de Lebesgue.

Un conjunto $A \subset X$ se llama conjunto medible Lebesgue, si y sólo si, para todo conjunto $E \subset X$, se verifica $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ ó

$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama conjunto medible Lebesgue, si y sólo si, para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}$, se verifica $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ ó

$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$.

Definición 2.2.12.2.–

Sea $(X\,,\mathcal{A}\,,\boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida y sea $\boldsymbol{\mu}^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0\,, +\infty]$ la medida exterior de Lebesgue en X. Un conjunto $A \subset X$, se llama conjunto medible Lebesgue, si y sólo si, para cada $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ dado , existe un conjunto

$\boldsymbol{\sigma}$– elemental $E \in \mathcal{A}$, $A \subset E$, tal que $\mu^*(E \setminus A) < \boldsymbol{\varepsilon}$ ó $\mu^*(E - A) < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Proposición 2.2. 4.–

Sea $\boldsymbol{\mu}^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0\,, +\infty]$ la medida exterior de Lebesgue .

1) Si $A \subset X$ es numerable, entonces $\mu^*(A) = 0$.

2) Si $\mu^*(E) = 0$, entonces E es medible.

2.2.13. Funciones Medibles

Antes de precisar la definición de función medible, es necesario recordar algunos conceptos que se ha visto anteriormente.

El par $(X\,,\mathcal{A})$ se llama espacio medible, donde X es un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ es una $\boldsymbol{\sigma}$– álgebra de los subconjunto de X .

Si (Y, T) es un espacio topológico, entonces (Y, B(T)) es un espacio Borel medible.

Si $Y = \mathbb{R}$ ó $Y = \overline{\mathbb{R}}$, $(Y, T) = (\mathbb{R}, T)$ ó $(Y, T) = (\overline{\mathbb{R}}, T)$ es la topología relativa usual y $(Y, B(T)) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ o $(Y, B(T)) = (\overline{\mathbb{R}}, B(\overline{\mathbb{R}}))$ es el espacio Borel medible en $\mathbb{R}$.

Definición 2.2.13.1.–

Sean $(X, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ y $(Y, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ dos espacios medibles. Una función $f: (X, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \to (Y, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ se llama $\boldsymbol{\mathcal{A}}$–$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ medible (o simplemente función medible), si y sólo si, para todo $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, $f^{-1}(B) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Esto es:

$f: (X, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \to (Y, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ es medible, si y sólo si, $\forall B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, $f^{-1}(B) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

El conjunto de todas las funciones medibles denotamos por

$F(X, \boldsymbol{\mathcal{A}}, Y, \boldsymbol{\mathcal{B}}) = \{ f: (X, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \to (Y, \boldsymbol{\mathcal{B}}) : \forall B \in \boldsymbol{\mathcal{B}},\ f^{-1}(B) \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \}$

Definición 2.2.13.2.–

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea (Y, T) un espacio topológico y sea $(Y, B(T))$ un espacio Borel medible.

Una función $f: (X, \mathcal{A}) \to (Y, B(T))$ es medible (ó Borel medible), si y sólo si, para todo abierto G de T, $f^{-1}(G) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Definición 2.2.13.3.–

Una función $f: (X, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \to (\overline{\mathbb{R}}, B(\overline{\mathbb{R}}))$ ó $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, si y sólo si, para cualquier subconjunto abierto G de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $f^{-1}(G) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Esto es:

Una función $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, si y sólo si, verifica cualquiera de las condiciones:

1) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\langle a, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. (medible)

2) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a, +\infty]) = \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. (medible)

3) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a\rangle) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. (medible)

4) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a]) = \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. (medible)

Proposición 2.2.5.–

Sea $(X , \mathcal{A})$ un espacio medible, sean f, g : $X \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones , $c \in \mathbb{R}$.

Entonces:

1) Si f es una función constante, entonces f es medible.

2) Si f y g son funciones medibles, entonces c f, f + g, f.g son funciones medibles.

3) Si f y g son funciones medibles, entonces los conjuntos

$\{ x \in X : f(x) < g(x) \}$, $\{ x \in X : f(x) \leq g(x) \}$, $\{ x \in X : f(x) = g(x) \}$

son medibles.

4) Si f y g son funciones medibles, entonces max { f , g } , min { f , g } ,

f^+, f^-, f^2, $|f|$ son medibles .

5) Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ es una sucesión de funciones medibles ,

entonces

$\sup \{ f_n , n \in \mathbb{Z}^+\}$, $\inf \{ f_n , n \in \mathbb{Z}^+\}$, $\lim_{n\to\infty} \sup \{ f_n \}$ y $\lim_{n\to\infty} \inf \{ f_n \}$

son medibles.

2.2.14. Función Característica

Definición 2.2.14.–

Sea X un conjunto no vacío y sea $A \subset X$.

Una función $x_A : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 , & \text{si } x \in A \\ 0 , & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

se llama función característica en A.

La función característica es una función medible.

2.2.15. Función Simple

Definición 2.2.15.1.–

Sea X un conjunto no vacío, $X \neq \emptyset$. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama función simple, si y sólo si, su rango o imagen es un conjunto finito de valores distintos del conjunto $\mathbb{R}$.

Esto es:

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama función simple, si y sólo si, la imagen de f

$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{ c_1 , c_2 , \ldots , c_p \} \subset \mathbb{R}$.

Definición 2.2.15.2.–

Sea X un conjunto no vacío, $X \neq \emptyset$, sean $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, p$

y sean $A_k \subset X$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $A_k \cap A_j = \emptyset$,

$\forall\, k \neq j \in \{ 1, 2, \ldots, p \}$, de modo que $\bigcup_{k=1}^{p} A_k = X$.

Una función $f = \sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k} : X \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k} \right)(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k}(x)$, para todo $x \in X$, donde

x_{A_k} es la función característica, se llama función simple.

Definición 2.2.15.3.–

Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$. Una función medible $f : A \to \mathbb{R}$ se denomina función simple, si y sólo si, los valores de f es un conjunto finito de valores de $\mathbb{R}$**,** es decir la imagen de f es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$**.**

Definición 2.2.15.4.–

Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$. Una función medible $f : A \to \mathbb{R}$ es una función simple, si y sólo si, existe una partición medible de A,

$P = \{ x_0 , x_1 , \ldots , x_{k-1} , x_k , \ldots , x_n \}$

$P = \{ A_k = x_k - x_{k-1} ,\ k = 1, 2, \ldots , n \}$, tal que

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, f_{A_k}(x)$, $\forall\, x \in A$, donde

f_{A_k} es la función característica de A_k .

Proposición 2.2.6.–

Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$. Si f: $A \to \mathbb{R}$ es una función medible no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente $\{ f_n \}$ de funciones simples no negativas, tal que $\{ f_n \}$ converge puntualmente a f, $\lim_{n\to\infty} f_n (x) = f(x)$.

2.2.16. Función Simple Medible

Definición 2.2.16.–

Sea $(X , \mathcal{A})$ un espacio medible , sean $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2 , \ldots , p$

y sean $A_k \subset X$, $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1 , 2 , \ldots , p$, $A_k \cap A_j = \emptyset$,

$\forall\, k \neq j \in \{ 1 , 2 , \ldots , p \}$, de modo que $\bigcup_{k=1}^{p} A_k = X$.

La función definida por $f = \sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k} : (X , \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ ó

$f = \sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k} : X \to \mathbb{R}$, donde

$A_k = \{ x \in X : f(x) = c_k \} = f^{-1} (c_k)$, $k = 1 , 2 , \ldots , p$ y

x_{A_k} es la función característica, tal que

$f (x) = (\sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k}) (x) = \sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k}(x)$, para todo $x \in X$,

se llama función simple medible.

El conjunto de todas las funciones simples medibles, se denota por

$S ((X, \mathcal{A}), \mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} : f (x) = \sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k}(x) \}$

Proposición 2.2.7.–

Sea $(X , \mathcal{A})$ un espacio medible.

Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones simples y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $f + g$, $f . g$ y $c\, f$ son funciones simples.

2.2.17. Funciones Medible Lebesgue

Definición 2.2.18.–

Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que la función f es medible Lebesgue, si y sólo si, para todo número real c, el conjunto

$\{ x \in A : f(x) > c \} = f^{-1} (\langle c , +\infty \rangle)$ es medible.

Proposición 2.2.7.–

Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$. Si $f, g: A \to \mathbb{R}$ son funciones medibles, entonces las funciones $f + g$, $k f$, $f . g$, $k \in \mathbb{R}$ son medibles.

2.2.18. Parte Positiva y Negativa de una Función Medible

Definición 2.2.18.–

Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ y sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función medible.

La parte positiva de la función f, denotada por f^+, se define como

$$f^+ (x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$= (\sup \{ f , 0 \})(x) = \sup \{ f(x) , 0(x) \}$$

La parte negativa de la función f, denotada por f^-, se define como

$$f^- (x) = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= (\sup \{ -f , 0 \})(x) = \sup \{ -f(x) , 0(x) \}$$

De la definición se deduce:

1) Las funciones $f^+ : A \to \mathbb{R}$, $f^- : A \to \mathbb{R}$ son medibles no negativas.

2) $f = f^+ - f^-$, es decir $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $\forall x \in A$.

3) $|f| = f^+ + f^-$

4) $f : A \to \mathbb{R}$ es medible, si y sólo si, f^+ y f^- son medibles.

2.2.19. Construcción de la definición de la Integral de Lebesgue

Para definir la integral de Riemann, se realiza particiones del dominio de la función y el valor de la integral se obtiene sumando los productos del valor de la función en cada punto de los intervalos de partición por la medida de los intervalos de partición.

Para definir la integral de Lebesgue, se realiza partición de la imagen de la función y el valor de la integral se obtiene sumando los productos de las medidas de las pre imágenes de los intervalos de partición de la imagen de la función por el valor de la función en cada intervalo de partición de la imagen de la función. Este procedimiento, explicamos de la siguiente manera.

Sea $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en $[a , b]$, tal que $y = f(x) \in \mathbb{R}$, $a \leq x \leq b$ y $m \leq f(x) \leq M$ ó $m \leq y \leq M$, donde m y M son respectivamente el mínimo y máximo de la función f, de manera que, la imagen de la función f es $\mathrm{Im}(f) = [m , M] \subset \mathbb{R}$ y el dominio de la función f es $\mathrm{Dom}(f) = [a , b] \subset \mathbb{R}$.

Sea $P = \{ m = y_0 , y_1 , y_2 , \ldots , y_{k-1} , y_k , \ldots , y_{n-1} , y_n = M \}$, con

$m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{k-1} < y_k < \ldots < y_{n-1} < y_n = M$ una partición de la imagen de la función f, $\mathrm{Im}(f) = [m , M]$.

Sean $E_0 = f^{-1}(y_0)$, $E_0 \subset [a , b]$,

$E_k = f^{-1}([y_{k-1} , y_k])$, $E_k \subset [a , b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$

y sean $m(E_0) = \boldsymbol{\mu_0}$ medida de E_0,

$m(E_k) = \boldsymbol{\mu_k}$ medida de E_k, $k = 1, 2, \ldots, n$

Consideremos que las sumas superiores y las sumas inferiores están definidas por:

Sumas superiores $S(f , P) = \mathbf{y_0\, \mu_0} + \sum_k \mathbf{y_k\, \mu_k}$

Sumas inferiores $I(f , P) = \mathbf{y_0\, \mu_0} + \sum_k \mathbf{y_{k-1}\, \mu_{k-1}}$

Entonces $S(f , P) - I(f , P) = \sum_k (\mathbf{y_k} - \mathbf{y_{k-1}})\, \boldsymbol{\mu_k}$

Si para cada $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ dado, la diferencia $\mathbf{y_k} - \mathbf{y_{k-1}}$ es muy pequeña o tiende a cero ,

$\mathbf{y_k} - \mathbf{y_{k-1}} < \boldsymbol{\varepsilon}$, entonces S (f , P) – I (f , P) $< \boldsymbol{\varepsilon}$,

entonces se dice que la función f es integrable en el intervalo [a , b] y el valor de la integral es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\, d\mu = y_0\, \mu_0 + \sum_k y_{k-1}\, \mu_{k-1} = y_0 \mu_0 + \sum_k y_k\, \mu_{k-1}$$

2.2.20. Integral de Lebesgue de Funciones Simples

Definición 2.2.21.1.–

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea la función simple medible no

negativa $f : X \to \mathbb{R}$, $f = \sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k}$, tal que $f(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k}(x)$,

con $c_k \geq 0$, $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \{ 1, 2, \dots , p \}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$,

$\forall\, k \neq j \in \{ 1, 2, \dots , p \}$, $\bigcup_{k=1}^{p} A_k = X$.

La integral de Lebesgue de la función f sobre X respecto de μ ,

se define como el número real

$$I(f , \mathcal{A}) = \int_X f(x)\, d\mu =$$

$$= \int_X \left(\sum_{k=1}^{p} c_k\, x_{A_k}(x) \right) d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{p} c_k \left(\int_X x_{A_k}(x)\, d\mu \right) = \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu(A_k)$$

Entonces: $I(f , \mathcal{A}) = \int_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu(A_k)$.

Definición 2.2.21.2.–

Sea $(X , \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida y sea f una función simple medible no

negativa y sea $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. La integral de Lebesgue de f sobre A, se define

como el número real

$$\int_A f\, d\mu = \int_A f\, x_A\, d\mu = \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu(A_k \cap A) .$$

Definición 2.2.21.3.–

Sea (X, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mu}$) un espacio de medida, sea f una función simple medible no negativa y sea $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible.

La integral de Lebesgue de g sobre X respecto de μ , está definida por

$\int_X g \, d\mu = \sup \{ \int_X f \, d\mu : 0 \leq f \leq g \}$.

Definición 2.2.21.4.–

Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$, sea

$P = \{ x_0 , x_1 , \ldots , x_{k-1} , x_k , \ldots , x_n \}$,

$P = \{ A_k = x_k - x_{k-1} , k = 1, 2, \ldots , n \}$ una partición medible de A y sea

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_{A_k}(x)$, $\forall x \in A$ una función simple no negativa.

La integral de Lebesgue de la función f sobre A con respecto a la partición P es el número real definido por $\sum_{k=1}^{n} c_k \, d(A_k)$ y se escribe

$I(f, P) = \int_A f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \mu(A_k)$, $0 \leq \int_A f \, d\mu \leq \infty$

2.2.21. Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sea (X , $\mathcal{A}$, μ) un espacio de medida, sean f , g funciones simples medibles no negativas y $c \geq 0$. Entonces:

1) $\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$

2) $\int_X (c f) \, d\mu = c \int_X f \, d\mu$

3) Si $f \leq g$, entonces $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

4) Si $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$, entonces $\int_A f \, d\mu = 0$.

5) Si A es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$, entonces $\int_{\mathbb{R}} f_A \, d\mu = \mu(A)$.

6) Si A y B son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces

$\int_A f_B \, d\mu = \mu(A \cap B)$.

2.2.22. Integral de Funciones Medibles no Negativas

Definición 2.2.23.1.–

Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa. La integral de Lebesgue de la función f sobre A, denotado por $\int_A f\, d\mu$, se define como el número real no negativo o infinito

$$\int_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu\ , \quad 0 \leq \int_A f\, d\mu \leq \infty\ .$$

Definición 2.2.23.2.–

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Se dice que la función f es integrable sobre A, si y sólo si, $0 \leq \int_A f\, d\mu < \infty$.

Proposición 2.2.9.–

1) Si $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles no negativas y $f \leq g$, entonces

   $\int_A f\, d\mu \leq \int_A g\, d\mu$.

2) Si $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles no negativas y $k \geq 0$, entonces

   $f + g$ y $k f$ son funciones integrables sobre A y se cumple

   a) $\int_A (f + g)\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu$

   b) $\int_A (k f)\, d\mu = k \int_A f\, d\mu$

2.2.23. Integral de Funciones Medibles Arbitrarias

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, entonces $f = f^+ - f^-$, donde f^+, f^- son funciones medibles no negativas, entonces $\int_A f^+\, d\mu$ y $\int_A f^-\, d\mu$ están bien definidas y se cumple $0 \leq \int_A f^+\, d\mu \leq \infty$ y $0 \leq \int_A f^-\, d\mu \leq \infty$.

Definición 2.2.24.1.–

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función medible y $f = f^+ - f^-$. La integral de Lebesgue de la función f sobre A, se define como

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu .$$

De la definición se deduce las siguientes proposiciones:

1) La función $f: A \to \mathbb{R}$ es integrable sobre A, si y sólo si, f^+ y f^- son integrables sobre A, es decir $0 \le \int_A f^+\,d\mu < \infty$ y $0 \le \int_A f^-\,d\mu < \infty$, lo cual implica que $-\infty < \int_A f\,d\mu < \infty$, es decir el valor de $\int_A f\,d\mu$ es un número real.
2) Si la función $f: A \to \mathbb{R}$ es medible, entonces f es integrable sobre A, si y sólo si, $|f|$ es integrable sobre A.
3) Sea $\mathcal{L}(A, \mathbb{R}) = \{ f: A \to \mathbb{R} \text{ medible } / -\infty < \int_A f\,d\mu < \infty \}$ el conjunto de funciones medibles integrables sobre A. La integral es una aplicación $I: \mathcal{L}(A, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $I(f) = \int_A f\,d\mu$.

   La aplicación $I: \mathcal{L}(A, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es lineal y se verifican :

   a) $\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu$, $\forall f, g \in \mathcal{L}(A, \mathbb{R})$

   b) $\int_A (k f)\,d\mu = k \int_A f\,d\mu$, $\forall f \in \mathcal{L}(A, \mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{R}$
4) Si $f: A \to \mathbb{R}$ es integrable sobre A, entonces $\left| \int_A f\,d\mu \right| \le \int_A |f|\,d\mu$
5) Si $f, g: A \to \mathbb{R}$ son integrables sobre A y $f \le g$, entonces $\int_A f\,d\mu \le \int_A g\,d\mu$.

CAPÍTULO III

COMPARACIÓN ENTRE LA INTEGRAL DE RIEMANN Y LA INTEGRAL DE LEBESGUE

El siguiente teorema establece la relación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue.

Teorema 3.1.–

Sea $[a , b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$ un intervalo real acotado y cerrado, y sea

$f : [a , b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en $[a , b]$ y con valores en $\mathbb{R}$.

Si la función f es integrable Riemann en [a , b] , entonces la función f es integrable Lebesgue en [a , b] y los valores de las integrales son iguales o equivalentes, $\int_a^b f\,dx = \int_{[a,b]} f\,du$.

Demostración.

$f : [a , b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real.

Supongamos que la función f es integrable Riemann en [a , b], demostrar que la función f es integrable Lebesgue en [a , b] y $\int_a^b f\,dx = \int_{[a,b]} f\,du$.

En efecto:

Sea $P_n = \{ a = x_o , x_1 , x_2 , \dots , x_n = b \}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

con $a = x_o < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$

una partición del intervalo [a , b].

Se define el ínfimo y supremo de la función f.

Ínfimo $m_k = \inf \{ f(x) , x \in (x_k - x_{k-1}) \}$, $k = 1, 2, \dots , n$

Supremo $M_k = \sup \{ f(x) , x \in (x_k - x_{k-1}) \}$, $k = 1, 2, \dots , n$

Se define la suma inferior y suma superior de la función f.

Suma inferior $I(f , P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k \, (x_k - x_{k-1})$ y

Suma superior $S(f , P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$

Se define la integral inferior e integral superior de la función f.

Integral inferior $\underline{S} = \int_a^b f\,dx = \sup \{ I(f , P_n) , \ P_n$ es partición de $[a , b] \}$

Integral superior $\overline{S} = \int_a^b f\,dx = \inf \{ S(f , P_n) , \ P_n$ es partición de $[a , b] \}$

Por hipótesis, la función f es integrable Riemann en [a , b], entonces

$\underline{S} = \overline{S} = \int_a^b f\,dx = \sup \{ I(f , P_n) , \ P_n$ es partición de $[a , b] \} =$

$\inf \{ S(f , P_n) , \ P_n$ es partición de $[a , b] \}$

En la sucesión de particiones del intervalo [a , b]

$P_1 , P_2 , \ldots , P_n , n \in \mathbb{N} , n \geq 1$, se escribe

$P_1 , P_2 = P_1 \cup P_2 , P_3 = P_1 \cup P_2 \cup P_3 , \ldots , P_n = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$

de donde se tiene

$P_1 \subset P_2 , P_2 \subset P_3 , P_3 \subset P_4 , \ldots , P_n \subset P_{n+1} , \ldots , n \in \mathbb{N} , n \geq 1$

que es una sucesión creciente de particiones del intervalo [a , b].

Si n es un valor grande ($n \to \infty$) los intervalos de la partición de [a , b], serán más pequeños, lo cual permite definir dos sucesiones de funciones.

Sea $\{ h_1 , h_2 , \ldots , h_n \}$ ó $\{ h_n \}$ una sucesión creciente de funciones, acotada superiormente por la función f , tal que $\lim_{n\to\infty} \{ h_n \} = h$, entonces $h \leq f$.

Sea $\{ g_1 , g_2 , \ldots , g_n \}$ ó $\{ g_n \}$ una sucesión decreciente de funciones, acotada inferiormente por la función f , tal que $\lim_{n\to\infty} \{ g_n \} = g$, entonces $f \leq g$, de manera que se cumple $h \leq f \leq g$.

Cuando el valor de n es grande ($n \to \infty$), la sucesión de particiones $P_n \subset P_{n+1}$ es muy fina, entonces las sucesiones $\{ h_n \}$ y $\{ g_n \}$ son funciones escalonadas, entonces son sucesiones de funciones medibles, por tanto, son integrables Lebesgue.

Entonces:

Suma inferior $I(f, P_n) = \int_{[a,b]} h_n \, du$

Suma superior $S(f, P_n) = \int_{[a,b]} g_n \, du$

Entonces:

Integral inferior $\underline{S} = \lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n \, du = \int_{[a,b]} h \, du$

Integral superior $\overline{S} = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n \, du = \int_{[a,b]} g \, du$

Como la función f es integrable Riemann, entonces

Integral inferior = Integral superior, es decir

$\underline{S} = \overline{S} = \int_a^b f \, dx$, entonces $\int_{[a,b]} h \, du = \int_{[a,b]} g \, du$ y como

$h \leq f \leq g$, entonces $h = g = f$ entonces

$\int_{[a,b]} h \, du = \int_{[a,b]} g \, du = \int_{[a,b]} f \, du$

Por tanto, la función f es integrable Lebesgue.

Como $\underline{S} = \overline{S} = \int_a^b f \, dx$, entonces

$$\int_a^b f \, dx = \int_{[a,b]} h \, du = \int_{[a,b]} g \, du = \int_{[a,b]} f \, du$$

Por tanto $\int_a^b f \, dx = \int_{[a,b]} f \, du$.

3.1. Comparación entre la Integral de Riemann y la Integral de Lebesgue

1) La integral de Riemann se define mediante particiones del dominio de la función y determinando el valor de la función en los puntos de cada intervalo de la partición. En cambio, para definir la integral de Lebesgue se realiza partición de la imagen de la función y se mide el tamaño del dominio, para los cuales la imagen de la función está comprendida entre dichos valores.

2) Sólo las funciones acotadas definidas en un intervalo acotado y cerrado son integrables Riemann. En cambio, las funciones no acotadas no son integrables Riemann.

3) Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en $[a, b]$. Entonces:

a) La función f es integrable Riemann, si y sólo si, es continua, monótona creciente o decreciente en $[a, b]$.

b) La función f es integrable Riemann, si y sólo si, es continua en casi todo punto de $[a, b]$.

c) Si la función f es Riemann integrable, entonces f es integrable Lebesgue y las dos integrales coinciden, $\int_a^b f\,dx = \int_X f\,d\mu$.

4) Toda función integrable Riemann, es integrable Lebesgue. El recíproco no es cierto.

5) La integral de Riemann es más usual cuando el dominio de la función es un intervalo acotado y cerrado. En cambio, la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann.

Ejemplo

El siguiente ejemplo muestra la relación y coincidencia de la integral de Riemann y la integral de Lebesgue.

Sea la función real $f : A = [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, \quad x \in A_1 = [0, 1] \\ 3, & 1 < x \leq 3, \quad x \in A_2 =]1, 3] \\ 6, & 3 < x \leq 6, \quad x \in A_3 =]3, 6] \end{cases}$$

a) Aplicando la integral de Riemann

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es una partición de A

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^1 2\,dx + \int_1^3 3\,dx + \int_3^6 6\,dx$$

$$= [\,2x\,]_{0}^{1} + [\,3x\,]_{1}^{3} + [\,6x\,]_{3}^{6}$$

$$= 2\,(1) + 3\,(2) + 6\,(3)$$

$$\int_0^6 f(x)\,dx = 26$$

b) Aplicando la integral de Lebesgue

f (A) = { $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$ } es finito, la función f es una función simple.

$$\int_{[0\,,\,6]} f\,(x)\,du = \sum_{i=1}^{3} c_i\, u\,(A_i) = c_1\, u\,(A_1) + c_2\, u\,(A_2) + c_3\, u\,(A_3)$$

$$= 2\,(1-0) + 3\,(3-1) + 6\,(6-3)$$

$$\int_{[0\,,\,6]} f\,(x)\,du = 2\,(1) + 3\,(2) + 6\,(3)$$

$$\int_{[0\,,\,6]} f\,(x)\,du = 26$$

CONCLUSIONES

PRIMERA: Dada una función $f : [a , b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden si: f es acotada y continua en [a , b]; monótona en [a , b] y discontinua en un número finito de puntos de [a , b].

SEGUNDA: La integral de Riemann está definida para funciones reales acotadas y continuas, monótonas y discontinuas en un número finito de puntos de su dominio; y la integral de Lebesgue está definida en general para funciones medibles (continuas y no continuas).

TERCERA: En la integral de Riemann se particiona el dominio de la función, en cambio en la integral de Lebesgue se particional el rango de la función.

En la integral de Lebesgue, la función a integrar debe ser medible, mientras que para la integral de Riemann no se usa medida.

La integral de Lebesgue es más general que la integral de Riemann.

RECOMENDACIONES

PRIMERA: Se recomienda que, en la restructuración de plan de estudios de la Escuela Profesional de Matemáticas de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, se contemple la asignatura de análisis matemático con enfoque de integral de Lebesgue.

SEGUNDA: A los docentes del Departamento académico de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, complementar en la enseñanza de integrales el enfoque de Riemann con Lebesgue.

REFERENCIAS

Alegría, P. (2007). *Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue.*

Bernal Gonzales , L. (2015). *Serie de funciones e Integral de Lebesgue.* España: Universidad de Sevilla.

Calvo Cano, R. (2007). *Desarrollo de Teoremas para la Integral de Riemann-Stieltjes y Lebesgue.* Colombia: Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

Chamorro, D. (2010). *Espacios de Lebesgue y de Lorentz.*

Cordero Zamorano, P. (2006). *La Integral de Lebesgue en su contexto histórico.*

De Nápoli, P. (2013). *Notas de Análisis Real.*

De Olivera Lamas, F. (2008). *Medida, Integración y diferenciación.*

Fava Roberto, Z. (2013). *Medida e Integral de Lebesgue.*

Gutiérrez. (2010). *Introducción a la Teoría de la Medida con Aplicaciones.* Guatemala: Universidad de San Carlos.

Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación.*

Martín, M., & Payá, R. (2000). *Análisis Funcional y Teoría de la Medida.*

Martínez Yañez, C. (2002). *Teoría de la Medida e Integración.* Valparaíso.

Menéndez-Conde Lara, F. , F. (2011). *Teoría de Integración.*

Neyra, U., & Clara, M. (2005). *Topología General.*

Ortega Sánchez, J. (1996). *Introducción al Análisis Real.*

Rodriguez, M. (2012). *Análisis Funcional.*

Tyler, A., & Camargo, M. (2017). *Relación entre la Integral de Riemann y La Integral de Lebesgue.*

ANEXO

MATRIZ DE CONSISTENCIA

COMPARACIÓN ENTRE LAS INTEGRALES DE RIEMANN Y LEBESGUE

PROBLEMA	OBJETIVO	METODOLOGÍA
PROBLEMA GENERAL ¿Bajo qué condiciones los resultados de las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden? **PROBLEMAS ESPECÍFICOS** a) ¿Para qué tipo de funciones están definidas las integrales de Riemann y Lebesgue? b) ¿Cuáles son las diferencias entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue?.	**OBJETIVO GENERAL** Determinar las condiciones bajo las cuales las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden. **OBJETIVOS ESPECÍFICOS** a) Establecer los tipos de funciones para los cuales están definidas la integral de Riemann y Lebesgue. b) Establecer las diferencias entre las integrales de Riemann y Lebesgue.	– Investigación cuantitativa. – Alcance descriptivo.