UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

ESPACIOS DE MEDIDA EN LA σ-ÁLGEBRA DE LOS BORELIANOS

PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS

AUTOR:

Br. ZAIDINA RIOS QUISPICHO

ASESOR:

Mgt. LUIS ALBERTO HEREDIA YAPURA

CÓDIGO ORCID:

0000-0002-7424-8477

CUSCO–PERÚ
2023

ANEXO 1

INFORME DE ORIGINALIDAD

El que suscribe Director de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas, ha sido sometido a revisión a través del software Antiplagio el trabajo de investigación titulado **"ESPACIOS DE MEDIDA EN LA σ-ÁLGEBRA DE LOS BORELIANOS"**, presentada por: **ZAIDINA RIOS QUISPICHO** Código estudiante 062058 para optar al **Grado de Maestro en Matemática.** Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a **UNA** revisión, mediante el software Antiplagio, conforme establece el Artículo 7° del presente reglamento y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de: **2% DE SIMILITUD**

EVALUACIÓN Y ACCIONES DEL REPORTE DE COINCIDENCIA PARA TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN, TESIS

Porcentaje	Evaluación y acciones	Marque con una X
Del 1 al 10%	No se considera plagio	**X**
Del 11al 30%	Devolver al usuario para las correcciones	
Mayores a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, que a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a ley.	

Por tanto, en mi condición de Director de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera hoja del reporte del software Antiplagio.

Cusco, 30 de enero de 2023

POSTFIRMA: **Dr. Alejandro Ttito Ttica**

N° DNI: 24676328

Se adjunta: informe de similitud de turnitin

NOMBRE DEL TRABAJO

ESPACIOS DE MEDIDA EN LA ALGEBRA DE LOS BORELIANOS

AUTOR

ZAIDINA RIOS

RECUENTO DE PALABRAS

33740 Words

RECUENTO DE CARACTERES

136474 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

139 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

648.4KB

FECHA DE ENTREGA

Jan 27, 2023 6:10 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Jan 27, 2023 6:12 PM GMT-5

2% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada bas

- 2% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 0% Base de datos de trabajos entregados
- 0% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Cro:

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 20 palabras)

Dedicatoria

A nuestro creador
por acompañarme siempre
y darme sabiduría
para concluir el trabajo
de investigación con éxito.

A mis padres y hermanos que
son mi fuerza de superación,
perseverancia y voluntad en
lograr cada meta que anhelo .

A mi esposo e hijos que
continuamente me motivan
en mi crecimiento profesional.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, por brindarme los conocimientos necesarios ya que ha sido un centro de enseñanza y aprendizaje, a todos mis docentes de maestría que me impartieron sus conocimientos y aportaron para mi formación tanto moral como intelectual.

Otro agradecimiento de forma muy especial para el Mgt. Luis Alberto Heredia Yapura, mi asesor por toda su paciencia, apoyo y guía en el presente trabajo de investigación. Además por su motivación, disposición y corrección cuando fueron necesarias, por sus aportes académicos y personales que fueron muy importantes para la finalización del presente trabajo , a la Dra.Haydee Quispe Berrio por estar constantemente motivandome a surgir como profesional.

Resumen

El objetivo del presente trabajo de investigación es construir los espacios de medida sobre la σ-Álgebra de los borelianos en un conjunto X. Este estudio inicia con la recta real extendida restringida a los reales no negativos, abordando las estructuras de σ-Álgebra, con la finalidad de definir la medida de Borel y su análogo de Lebesque que sirve para definir la integral. También se obtienen otras estructuras a partir de espacios de Borel elementales, tales como la σ-álgebra producto de borelianos, por medio de las aplicaciones proyecíon de conjuntos medibles. Luego, determinar la cardinalidad de los borelianos sobre $\mathbb{R}$, que en efecto tiene la cardinalidad del continuo. Finalmente, se caracteriza la medida de Radon, con base en espacios localmente compactos.

Palabras Clave. σ-Álgebra de borel, Conjunto de Borel, Medidas de Borel, Medida de Lebesgue, Medida de Radon, Cardinalidad.

Abstract

The aim of this research work is to build the measure spaces on the σ-Algebra of the Borelians in a set X. This study begins with the extended real line restricted to non-negative reals, involving structures of σ-Algebra, in order to define the Borel measure and its Lebesque analogue that serves to define the integral. It is also obtained other structures from elementary Borel spaces such as the σ-algebra product of Borelians through the projection applications of measurable sets. Then, to determine the cardinality of the Borelians over $\mathbb{R}$, which in effect has the cardinality of the continuous. Finally, the Radon measure is characterized, based on spaces locally compact.

Keywords. σ-Algebra of Borel, Set of Borel, Measures of Borel, Measure of Lebesgue, Radon measure, Cardinality.

Índice General

Dedicatoria **1**

Agradecimientos **2**

Resumen **3**

1 Capítulo 1. Planteamiento del Problema **6**

1.1 Planteamiento del Problema 6

1.1.1 Situación Problemática 6

1.1.2 Formulación del Problema 8

1.1.2.1 Problema General 8

1.1.2.2 Problemas Específicos 8

1.1.3 Justificación de la Investigación 8

1.1.3.1 Importancia Teórica 8

1.1.3.2 Importancia Académica 8

1.1.4 Formulación de Objetivos 9

1.1.4.1 Objetivo General 9

1.1.4.2 Objetivos Específicos 9

1.2 Metodología 9

1.2.1 Tipo y Nivel de Investigación 9

1.2.2 Unidad de Análisis 10

1.2.3 Técnica de Recolección de Información 10

1.3 Antecedentes Teóricos del Problema 10

1.3.1 Antecedentes Nacionales 10

1.3.2 Antecedentes internacionales 11

2 Capítulo 2. Marco Teórico 12

2.1 Preliminares 12

2.2 Medidas en σ-Álgebras 24

2.3 σ-Álgebra de Borel o la σ-Álgebra de los Borelianos 26

2.4 Extensión de Medidas 48

2.5 La Integral 76

2.6 Marco Conceptual 113

3 Capítulo 3. Espacios de Medida en la σ-Álgebra de los Borelianos 116

3.1 Cardinalidad de los Borelianos 116

3.2 Medida de Lebesgue en Dimensiones Superiores 121

3.3 σ-Álgebra Producto Generalizado 130

3.4 Medidas de Radon en Localmente Compactos 133

Conclusiones 135

Recomendaciones y Sugerencias **136**

Bibliografía **137**

Anexos **139**

Lista de Símbolos

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	Conjunto de los número reales extendidos
$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$	Conjuntode números reales extendidos no negativos
$2^X = \mathcal{P}(X)$	Potencia de un conjunto X
$f^{\leftarrow}(A)$	Imagen inversa de A
$f^{\rightarrow}(A)$	Imagen directa de A
$\mathcal{M}_{\vert Y}$	σ-Álgebra restringida al conjunto Y
$\mathcal{B}_X$	σ-Álgebra de Borel de X o σ-Álgebra de los Borelianos de X
$\mu_{\vert Y}$	Restricción de la medida μ a Y
$\mu + \mu'$	Medida suma
$a\mu$	Medida producto por un escalar
$g(a^-)$	Límite lateral a izquierda de a
$g(a^+)$	Límite lateral a derecha de a
λ_g	Medida de Lebesgue-Stieltjes
μ^*	Medida exterior en X
λ^*	Medida exterior de Lebesgue
λ_g^*	Medida exterior Lebesgue-Stieltjes asociada a g

$f_*\mu$	Medida imagen directa de μ por medio de f
σ, τ_x	Aplicación simetría σ y traslación τ_x
$f_*\mathcal{C}$	Clase imagen directa de $\mathcal{C}$
$f_*\mathcal{M}$	σ-Álgebra imagen directa de $\mathcal{M}$
$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$	Clase de partes producto cartesiano
$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$	σ-Álgebra producto
$\pi_1,\ \pi_2$	Primera y segunda proyección canónica
$\int f d\mu$	Integral de f
$\mathbb{I}_A, \chi_A$	Función indicatriz de X o función característica de X
$\mu_{(h)}$	Medida asociada a la integral de h

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1 Planteamiento del Problema

1.1.1 Situación Problemática

La ciencia viene avanzando vertiginosamente en la parte de las ciencias básicas y dentro de ella, la Teoría de la Medida sirve como instrumento para las demás disciplinas como el análisis real y funcional, ecuaciones diferenciales, la teoría probabilística y por ende los procesos estocásticos. En estos últimos tiempos han presentado real importancia por las aplicaciones que se encuentran en las diferentes disciplinas del conocimiento científico.

El concepto de medida se utiliza desde tiempos antiguos con Euclides de Megara (325-265 a.C) y Galileo Galilei (1564-1642), comparando longitudes, áreas y volúmenes como necesidad en la disciplina de cálculo, Georg Cantor (1845-1918) define la medida de un conjunto (acotado) arbitrario $A \subset \mathbb{R}^n$ conjuntamente con otros matemáticos como Otto Stolz y Carl Gustav Axel Harnack definieron cuestiones equivalentes en $\mathbb{R}$.

El primero en considerar a los conjuntos medibles y dar la definición de medida fue Giuseppe Peano (1858-1932) en 1887, utilizando la medida de otros autores en sus trabajos (que en el caso del plano definía mediante aproximaciones externas con polígonos) y definieron un conjunto medible como aquella medida interna que coincide con la medida externa. La medida general que se utiliza desde siglos pasados es la medida de Lebesgue. Además explicó la relación existente entre medida e integración,demostrando que una funcion acotada

$$f\colon [a,b] \to [0,+\infty[,$$

era Riemann integrable si y sólo si el conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ limitado por la gráfica de f y las rectas $x = a,\ x = b$ e $y = 0$ era medible, en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = m(E).$$

En 1892 Camille Jordan (1838-1922) definió de manera más sencilla; utilizando una malla de cuadrados en lugar de polígonos; como consecuencia de esta definición se tiene que los racionales no son medibles. Émile Borel (1871-1956) en su tesis doctoral, dió un aporte importante en la aditividad enumerable para las medidas. Además, dió una definición razonable para conjuntos de medida nula, mientras que para otros autores, el conjunto de los racionales de $[0,1]$ medía 1, para otros medía 0 y para otros medía $+\infty$. Se sabe por un resultado debido a Cantor que, todo conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}$ es unión de la forma $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de a lo más un número contable de intervalos abiertos disjuntos I_n.

Émile Borel define la medida como serie infinita y describe una clase de conjuntos (llamados borelianos), que pueden obtenerse a partir de conjuntos abiertos, mediante iteraciones en las que se toman uniones o diferencias enumerables de conjuntos de esa clase e indica que los conjuntos donde se define la medida son numerablemente aditivos.

1.1.2 Formulación del Problema

1.1.2.1 Problema General

¿Cómo construir los espacios de medida sobre la σ-Álgebra de los borelianos?

1.1.2.2 Problemas Específicos

1. ¿Cómo establecer la σ-Álgebra producto de borelianos?

2. ¿Cuál es el cardinal de la σ-Álgebra de los borelianos en $\mathbb{R}$?

3. ¿Qué otras medidas se desprenden a partir de la definición de Medida de Borel?

1.1.3 Justificación de la Investigación

1.1.3.1 Importancia Teórica

Con el presente trabajo se pretende contribuir con el aporte teórico–científico en los siguientes aspectos

1. Ampliar el conocimiento científico de los espacios de medida borelianos en la σ-Álgebra de los borelianos.

2. Contribuye al desarrollo científico de la Medida e Integración, disciplina que es teórica en el sentido riguroso y formal.

1.1.3.2 Importancia Académica

1. Contribuye en la didáctica de la matemática, en el sentido de acrecentar el aprendizaje de las medidas borelianas usando los conceptos que aquí se describen y que además pueden ser usardas como herramienta en el aprendizaje significativo.

2. Otra razón es la ampliación de temas para las futuras investigaciones en las que se mencionan los borelianos, diversificando así los métodos matemáticos en la medida e integración.

3. La integración de métodos probabilísticos se amplia en el contexto de teoría de la medida con otras ramas de la matemática como el análisis,la optimización y la estadística.

1.1.4 Formulación de Objetivos

1.1.4.1 Objetivo General

Construir los Espacios de Medida sobre la σ-Álgebra de los borelianos.

1.1.4.2 Objetivos Específicos

1. Establecer la σ-Álgebra producto de los borelianos.

2. Determinar el cardinal de la σ-Álgebra de los borelianos en $\mathbb{R}$.

3. Identificar otras medidas a partir de las medidas de Borel.

1.2 Metodología

1.2.1 Tipo y Nivel de Investigación

Investigación básica según [Hernández-Sampieri et al., 2018], debido a que está destinada a aportar conocimientos científicos basados en la teoría de la medida y la teoría de conjuntos a un nivel descriptivo [Figueroa Serrudo et al., 2018], se caracterizan porque los resultados sirven para profundizar los conocimientos del tema en cuestión. Así también se desarrollan profundamente los conocimientos que existen de los borelianos en teoría de la medida.

De acuerdo a la naturaleza el diseño de la investigación, es no experimental.

Según el enfoque es cualitativo, tiene como propósito la descripción de las cualidades del trabajo de investigación.

1.2.2 Unidad de Análisis

En la investigación se estudiará a los espacios de medida borelianos.

1.2.3 Técnica de Recolección de Información

En la recolección de información se utilizó libros, artículos y tesis vinculados al tema para esclarecer la profundidad en el trabajo.

1.3 Antecedentes Teóricos del Problema

1.3.1 Antecedentes Nacionales

[Machaca Huancollo, 2018] realizó el tema de investigación "Relaciones entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue", donde establece condiciones para determinar cuándo la integral de Riemann y Lebesgue de la función existen en un dominio, mediante una función acotada y medible en un intervalo cerrado con medida nula en puntos de discontinuidad, que hace una descripción de la medida e integración de funciones.

[Asmat Medina, 2021] en su trabajo "Un espacio topológico no productivamente Baire asumiendo la hipótesis del continuo", desarrollado en la ciudad de Lima pretende demostrar la existencia de espacios topológicos de Baire no productivamente Baire. Acerca de la metodología se observa que el trabajo responde a un método de investigación que es inductivo-deductivo para poder establecer la cardinalidad del continuo.

1.3.2 Antecedentes internacionales

[Velosa et al., 2015] realizó en el trabajo de investigación intitulado “Introducción a la medida e integral de Haar”, desarrollado en la ciudad Bogotá. El objetivo principal fue estudiar algunos aspectos del Análisis Armónico y Espectral en lo que respecta a la medida e integral de Haar. Sobre las conclusiones a las que se arribaron fueron: La medida de Haar es una herramienta poderosa ya que lleva la teoría de la medida e integración de Lebesgue a un campo más general como los son los grupos discretos compactos $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, grupos discretos no compactos $\mathbb{Z}$ o grupos ni compactos ni discretos $\mathbb{T}$.

El teorema de Fubini permite concluir que siempre se puede establecer la medida en el producto cruz de espacios medibles σ-Finitos, está es la medida producto de las medidas de cada espacio por lo que se puede definir una integral con respecto a dicha medida. Es útil para encontrar la medida de Haar en espacios más complejos

Con estas hipótesis se puede enunciar el Teorema de Representación de Riesz, ampliando las herramientas de trabajo permitiendo el estudio de medidas al de funcionales lineales sobre el espacio de funciones reales, es decir permite hacer uso de resultados algebraicos y de análisis funcional.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Preliminares

Las definiciones y resultados presentados en esta parte se encuentran en [Machado, 2011]. La recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$ se define como el conjunto $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en cual se considera la extensión de la relación de orden total usual de $\mathbb{R}$ que tiene a $+\infty$ y $-\infty$ como máximo y mínimo respectivamente.

La Topología usual de $\overline{\mathbb{R}}$ es aquella cuyas vecindades de $a \in \mathbb{R}$ son todos los conjuntos que contienen algún intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$ y las vecindades de $-\infty$ son los conjuntos que contienen algún intervalo $[-\infty, M[$, con $M \in \mathbb{R}$ y las vecindades de $+\infty$ son los conjuntos que contienen algún intervalo $]M, +\infty]$, con $M \in \mathbb{R}$. Ésta topología induce en $\mathbb{R}$ la topología usual de $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$, como subespacio de la misma.

Denótese con $\mathbb{R}_+$ al rayo $[0, +\infty[\subset \mathbb{R}$.[1] Similármente se denota por $\overline{\mathbb{R}}_+$ el correspondiente intervalo cerrado en $+\infty$,

$$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Así como se extienden las leyes de composición adición y multiplicación, operaciones bien

[1] Es frecuente usar esta notación para el intervalo $]0, +\infty[$ en vez del intervalo cerrado.

definidas en $\mathbb{R}_+$ a $\overline{\mathbb{R}}_+$, se tiene

$$x + (+\infty) = +\infty = +\infty + x, \forall x \in [0, +\infty[,$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (+\infty) = +\infty = +\infty \cdot x, \forall x \in [0, +\infty[,$$

$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$0 \cdot (+\infty) = 0 = (+\infty) \cdot 0,$$

Dicha extensión se debe a la indeterminación de la suma $(+\infty) + (-\infty)$ sin renunciar a las propiedades (asociatividad, distributividad y conmutatividad), hace que no se puedan extender estas operaciones a todo $\overline{\mathbb{R}}$. El problema, no es el hecho de tener uno de los casos usuales de indeterminación, pues lo mismo ocurre con $0 \cdot (+\infty)$ y como se observa el hecho que se tenga una definición para ese producto no compremete las propiedades deseadas y demuestra ser la opción respecto a las aplicaciones de teoría de la medida.

Proposición 2.1 (Propiedades de las Operaciones en $\overline{\mathbb{R}}_+$)**.** Se define las operaciones de adición y multiplicación en $\overline{\mathbb{R}}_+$ y existen 0 y 1 como elementos neutros, respectivamente, además son conmutativas, asociativas y verifican las propiedades distributivas usuales. Dados $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}_+$, satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{array}{ll} 0 + x = x = x + 0, & 1 \cdot x = x = x \cdot 1, \\ x + y = y + x, & x \cdot y = y \cdot x, \\ (x + y) + z = x + (y + z), & (x \cdot y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot z, \\ x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z, & (y + z)x = y \cdot x + z \cdot x. \end{array}$$

Satisfacen tambíen las propiedades de Monotonía: Para $x, x', y, y' \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$(x \geq x' \wedge y \geq y') \Rightarrow (x + y \geq x' + y' \wedge x \cdot y \geq x' \cdot y'),$$

En particular, $x + y \geq x$ y $x + y \geq y$, para todo $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Prueba. Las propiedades de existencia de los elementos neutros y conmutatividad se deducen inmediatamente de las definiciones (para la adición y multiplicación); de las propiedades análogas para los números reales ya conocidos. También por esta razón, sólo se tienen que justificar las asociatividades $(x+y)+z = x+(y+z)$ y $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$, la distributividad $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ en caso en que alguno de los tres elementos sea $+\infty$ (tanto el valor de la suma y el producto es $+\infty$). Para la asociatividad de la adición resulta que, si alguno de los tres elementos fuese 0 y alguno fuese $+\infty$, ambos miembros de la igualdad sería $+\infty$. Respecto a la distributividad, basta justificar la primera igualdad enunciada, teniendo en cuenta la conmutatividad de la multiplicación $x \cdot y = y \cdot x$. Se asume que: Si $x = 0$, ambos miembros de la igualdad son iguales a 0. Si $y = 0$, ambos miembros de la igualdad son $x \cdot z$ y si $z = 0$, ambos miembros de la igualdad son $x \cdot y$, si ninguno de los tres elementos es 0 y alguno es $+\infty$, ambos miembros de la igualdad son $+\infty$. Las propiedades de monotonía $(x \geq x' \wedge y \geq y') \Rightarrow (x+y \geq x'+y' \wedge x \cdot y \geq x' \cdot y')$, son conocidas en el caso de los elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. En el caso general, relativo a la adición, si uno de los cuatro elementos involucrados es $+\infty$, entonces $x = +\infty$ o $y = +\infty$ y por tanto $x + y = +\infty$. En el caso general respecto a la multiplicación, si uno de los cuatro elementos es 0, entonces $x' = 0$ o $y' = 0$, por tanto $x' \cdot y' = 0$ y seguidamente, asumiendo que ninguno de los cuatro elementos sea 0, se tiene que, si uno de los cuatro elementos es 0, entonces, $x = +\infty$ o $y = +\infty$ y por tanto, $x \cdot y = +\infty$.

Definición 2.2 (Conjunto Finito)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo e $I_n = \{1, \ldots, n\}$. Un conjunto X es *finito* si y sólo si es vacío o existe una aplicación $x\colon I_n \to X$ biyectiva. En el primer caso se dice que X tiene cero elementos y en el segundo n es el cardinal de X. También se dice que X es *equipotente* al conjunto I_n y se denota por $X \approx I_n$. Un conjunto que no es finito se llama *Conjunto Infinito*.

Definición 2.3 (Conjunto Enumerable)**.** Un conjunto X es *enumerable* o *numerable*, si es finito o cuando existe una biyección $x\colon \mathbb{N} \to X$, llamada *enumeración* de X. En el caso que X no es finito y si es enumerable, se dice que X es *infinito numerable* y se denota $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Definición 2.4 (Conjunto Contable)**.** Un conjunto es *contable* si es finito o enumerable. Una familia es contable si su conjunto de índices es contable. También, una familia es finita si su conjunto de índices es finito.

Definición 2.5 (Sumas Finitas)**.** Dada una operación en un conjunto, que sea conmutativa, asociativa y con elemento neutro, tiene sentido en referirse a la suma de una familia finita $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$, que se denota por $\sum_{i\in I} x_i$. Tales sumas se pueden definir recursivamente sobre el número de elementos del conjunto de índices I con el fin de obtener,

$$\sum_{i\in\emptyset} x_i = 0 \text{ y para cada } i_0 \in I,\ \sum_{i\in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} x_i.$$

Proposición 2.6 (Propiedades de las Sumas Finitas)**.** Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia finita de elementos en $\overline{\mathbb{R}}_+$ se tiene

a) (Caso I sea finito) Si I tiene un sólo elemento i_0, se tiene $\sum_{i\in I} x_i = x_{i_0}$ y si I tiene dos elementos, i_0 e i_1, $\sum_{i\in I} x_i = x_{i_0} + x_{i_1}$. En caso que $x_i = 0, \forall i \in I$, implica $\sum_{i\in I} x_i = 0$ y en general, si $x_i = x$, para todo $i \in I$ e I tiene k elementos, entonces $\sum_{i\in I} x_i = kx$.

b) (Cambio de índices) Dado I' otro conjunto de índices y la aplicación biyectiva $\varphi\colon I' \to I$, se tiene

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in I} x_{\varphi(j)}.$$

c) (Asociatividad de Sumatorias) En caso que $I = I_1 \cup I_2$, con I_1 e I_2 disjuntos , entonces

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I_1} x_i + \sum_{i\in I_2} x_i.$$

En particular, se tiene la *primera Propiedad de Monotonía*. Si $I' \subset I$, entonces

$$\sum_{i\in I'} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i.$$

d) (Asociatividad General de Sumatorias) Sea I unión finita de una familia de subconjuntos $I_\alpha, \alpha \in A$, disjuntos dos a dos, entonces

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\alpha\in A}\Big(\sum_{i\in I_\alpha} x_i\Big).$$

e) (Linealidad) Para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}_+$, se tiene

$$y \cdot \Big(\sum_{i\in I} x_i\Big) = \sum_{i\in I}(y \cdot x_i), \quad \Big(\sum_{i\in I} x_i\Big) \cdot y = \sum_{i\in I}(x_i \cdot y)$$

Además, si $(y_i)_{i\in I}$ es otra familia de elementos con $y \in \overline{\mathbb{R}}_+$, entonces

$$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \Big(\sum_{i\in I} x_i\Big) + \Big(\sum_{i\in I} y_i\Big)$$

f) (Segunda Propiedad de Monotonía) Si para cada $i \in I$ e $y_i \leq x_i$, entonces

$$\sum_{i\in I} y_i \leq \sum_{i\in I} x_i.$$

Definición 2.7 (Sumas Arbitrarias)**.** Sea J un conjunto arbitrario de índices y $(x_j)_{j\in J}$ la familia de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Se define la *suma arbitraria* como

$$\sum_{j\in J} x_j = \sup\{\sum_{j\in I} x_j \mid \forall I \text{ parte finita de } J\}.$$

El particular, para cada $j,\ x_j = 0$, implica $\sum_{j\in J} x_j = 0$ y si existe $j \in J$, tal que $x_j = +\infty$, implica $\sum_{j\in J} x_j = +\infty$. También que si para cada $j,\ x_j = x \neq 0$ y el conjunto J es infinito, entonces $\sum_{j\in J} x_j = \sum_{j\in J} x = +\infty$.

En el caso que J sea finito, la suma coincide con la suma finita ya definida, tomando en consideración la propiedad de monotonía referida en c) que implica que el supremo es en este caso, un máximo, igual a la suma en el caso finito.

Proposición 2.8 (Cambio de índices para sumas arbitrarias)**.** Sea $(X_j)_{j\in J}$ la familia finita o infinita de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ y J' otro conjunto de índices y $\varphi\colon J' \to J$ la aplicación biyectiva entonces se tiene

$$\sum_{j\in J} x_i = \sum_{i\in J'} x_{\varphi(i)}.$$

Prueba. Teniendo en cuenta la propiedad b) cambio de índices para el caso I sea finito,

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I'} x_{\varphi(i)} \Rightarrow \sup_{I\subset J} \sum_{i\in I} x_i = \sup_{I'\subset J'} \sum_{i\in I'} x_{\varphi(i)}$$

el conjunto de sumas parciales finitas cuyo supremo define el primer miembro coincide con el conjunto de sumas parciales finitas cuyo supremo define el segundo miembro.

Proposición 2.9 (Comparación con las series)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la familia de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, la suma finita $S_n = \sum_{p=1}^{n} x_p$. Se tiene entonces que la suma infinita $\sum_{p\in\mathbb{N}} x_p$, en el sentido de la Definición 2.7 (Sumas Arbitrarias), es el límite en $\overline{\mathbb{R}}_+$ de la sucesión de elementos S_n.

Prueba. Por definición, S_n es la suma finita parcial de $\sum_{p\in\mathbb{N}} x_p$, que corresponde al conjunto finito $\{1,\ldots,n\} \subset \mathbb{N}$, además $S_n \leq \sum_{p\in\mathbb{N}} x_p$. Ahora sea $M > 0$, con $M < \sum_{p\in\mathbb{N}} x_p$, existe un conjunto finito finito $I \subset \mathbb{N}$, tal que $\sum_{p\in I} x_p > M$ y siendo entonces $n_0 = \max I$, se tiene para cada $n \geq n_0$, $\{1,\ldots,n\} \supset I$, donde $S_n \geq \sum_{p\in I} x_p > M$. En el caso en que $\sum_{p\in I} x_p = +\infty$, muestra que la sucesión de los S_n tiene límite $+\infty$ y en el caso en que $\sum_{p\in I} x_p$ sea finito, se puede concluir que, para cada $\delta > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_0$, $S_n > \sum_{p\in I} x_p - \delta$, teniénodose también $S_n \leq \sum_{p\in I} x_p < \sum_{p\in I} x_p + \delta$, lo que muestra que la sucesión de los S_n tiene límite $\sum_{p\in I} x_p$.

Proposición 2.10 (Primera propiedad de monotonía)**.** Sea una familia finita o infinita de elementos en $\overline{\mathbb{R}}_+$ y para cada $J' \subset J$. Se tiene luego

$$\sum_{j\in J'} x_j \leq \sum_{j\in J} x_j.$$

Prueba. de 1 Si $(x_j)_{j\in J}$ es una familia finita de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ y $J' \subset J$, por la primera propiedad de monotonía (caso finito)

$$\sum_{j\in J'} x_j \leq \sum_{j\in J} x_j.$$

Prueba 2 Si $(x_j)_{j\in J}$ es una familia arbitraria de elementos $\overline{\mathbb{R}}_+$ y $J' \subset J$, se tiene que si J' es finito, $\sum_{j\in J'} x_j \leq \sum_{j\in J} x_j$, pues $\sum_{j\in J} x_j = \sup\{\sum_{j\in I} x_j \colon I \text{ parte finita de } J\}$ y como J' es parte finita de J, cuando J' es infinito, $\sum_{j\in J'} x_j = \sup\{\sum_{j\in I} x_j \colon I \text{ parte finita de } J'\}$ y como $J \subset J'$, entonces todas las I partes finitas de J también son partes finitas de

J, luego $\sup\{\sum_{j\in I} x_j \colon I \text{ parte finita de } J'\} \leq \sup\{\sum_{j\in I'} x_j \colon I' \text{ parte finita de } J\}$ con $I \subset I'$, así, $\sum_{j\in J'} x_j \leq \sum_{j\in J} x_j$.

Proposición 2.11 (Segunda propiedad de monotonía)**.** Sea $(x_j)_{j\in J}$ una familia finita o infinita de elementos en $\overline{\mathbb{R}}_+$ y sea para cada $j \in J,\ y_j \leq x_j$ Se tiene entonces

$$\sum_{j\in J} y_j \leq \sum_{j\in J} x_j.$$

Prueba. En el primer miembro, por la definición de suma como un supremo, basta mostrar que para cada $I \subset J$ finito, $\sum_{j\in I} y_j \leq \sum_{j\in J} x_j$. Eso resulta de lo que refiere **f)** de la Proposición 2.6 (Segunda propiedad de monotonía), visto que se puede escribir

$$\sum_{j\in I} y_j \leq \sum_{j\in I} x_j \leq \sum_{j\in J} x_j.$$

Proposición 2.12 (Propiedad asociativa)**.** Sea $(x_j)_{j\in J}$ una familia finita o infinita de elementos en $\overline{\mathbb{R}}_+$ y suponga que el conjunto de índices J es unión finita o infinita de subconjuntos J_β, con $\beta \in B$ disjuntos dos a dos. Se tiene entonces

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big)$$

Prueba. Se muestra primero que $\sum_{j\in J} x_j \leq \sum_{\beta\in B}(\sum_{j\in J_\beta} x_j)$.

En efecto teniendo en cuenta la definición en primer miembro como un supremo, bastará mostrar que, para cada $I \subset J$ finito, se tiene $\sum_{j\in I} x_j \leq \sum_{\beta\in B}(\sum_{j\in J_\beta} x_j)$. Fije entonces entonces $I \subset J$ finito. Sea $A \subset B$ finito constituida por los β tal que $I \cap I_\beta \neq \emptyset$ (A lo más un β para cada elemento de I). El conjunto finito I es la unión finita de conjuntos $I \cap J_\beta$, con $\beta \in A$, que son disjuntos dos a dos, por lo que teniendo en cuenta **d)** y **f)** de la Proposición

2.6 (Asociatividad general de sumatorias y segunda propiedad de monotonía), se puede escribir

$$\sum_{j\in I} x_j = \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in I\cap J_\beta} x_j\Big) \leq \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big) \leq \sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in I\cap J_\beta} x_j\Big),$$

como se quería demostrar.

Ahora se muestra la desigualdad opuesta $\sum_{j\in J} x_j \geq \sum_{\beta\in B}(\sum_{j\in J_\beta} x_j)$, para lo cual se puede suponer el primer miembro finito; en particular, cada x_j finito y cada $\sum_{j\in J_\beta} x_j$ finito. Para eso y teniendo en cuenta la definición del segundo miembro como un supremo, bastará probar que, fijado $A \subset B$ finito, se tiene

$$\sum_{j\in J} x_j \geq \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big).$$

Suponga por reducción al absurdo, que eso no suceda, por tanto para un cierto A finito con k elementos ($k =$Card$A$), $\sum_{j\in J} x_j < \sum_{\beta\in A}(\sum_{j\in J_\beta} x_j)$. Siendo $\delta > 0$ tal que

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) + \delta < \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big),$$

se puede considerar, para cada $\beta \in A$, que $I_\beta \subset J_\beta$ finito tal que

$$\sum_{j\in J_\beta} x_j \geq \Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big) - \delta/k$$

y siendo I conjunto finito unión de los I_β, con $\beta \in A$, se obtiene, teniendo en cuenta asociatividad finita referida en **d)** de la Proposición 2.6 (Asociatividad general de sumatorias)

$$\sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big) \leq \sum_{\beta\in A}\Big((\sum_{j\in I_\beta} x_j) + \delta/k\Big) = \Big(\sum_{\beta\in A}(\sum_{j\in I_\beta} x_j)\Big) + \delta =$$

$$= \Big(\sum_{j\in I} x_j\Big) + \delta \leq \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) + \delta < \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big),$$

lo que es absurdo. Luego, debe ser que $\sum_{j\in J} x_j \geq \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big)$ y queda demostrada la propiedad asociativa.

Proposición 2.13 (Propiedad de Fubini para Sumatorias)**.** Sean J y K dos conjuntos finitos o infinitos, de índices y $(x_{j,k})_{(j,k)\in J\times K}$ una familia de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ se tiene entonces.

$$\sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in K} x_{j,k}\Big) = \sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k} = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{j\in J} x_{j,k}\Big) \tag{2.1}$$

En particular, siendo J un conjunto finito o infinito, de índices y $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_j)_{j\in J}$ dos familias de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ se tiene

$$\sum_{j\in J}(x_j + y_j) = \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in I} y_j\Big) \tag{2.2}$$

Prueba. La primera igualdad (2.1) resulta de la propiedad asociativa y de la propiedad cambio de índices. En efecto, la primera igualdad resulta de considerar $J \times K$ como la unión disjunta de los subconjuntos $\{j\} \times K$, con $j \in J$, y el segundo a considerar $J \times K$ como la unión disjunta de subconjuntos $J \times \{k\}$ con $k \in K$, en ambas situaciones la biyección es la identidad en $J \times K$ en cuanto a la segunda afirmación, es una consecuencia de la primera si se considere $K = \{1, 2\}$ y defina $z_{j,1} = x_j$ y $z_{j,2} = y_j$. Esto es,

$$\sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in K} z_{j,k}\Big) = \sum_{j,k\in J\times K} z_{j,k} = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{j\in J} z_{j,k}\Big) \Rightarrow$$

$$\sum_{j\in J}(z_{j,1} + z_{j,2}) = \sum_{j\in J} z_{j,1} + \sum_{j\in J} z_{j,2} \Rightarrow \sum_{j\in J}(x_j + y_j) = \sum_{j\in J} x_j + \sum_{j\in J} y_j$$

Proposición 2.14 (Distributividad)**.** Sea $(x_j)_{j\in J}$ una familia finita o infinita de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ e $y \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Se tiene entonces

$$y \cdot \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) = \sum_{j\in J}(y \cdot x_j), \quad \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \cdot y = \sum_{j\in J}(x_j \cdot y).$$

Prueba. Se justifica sólo la primera igualdad ya que la segunda resulta de aquella, teniendo en cuenta la conmutatividad de la multiplicación. Para cada parte finita $I \subset J$, se tiene entonces

$$\sum_{j\in I}(y \cdot x_j) = y \cdot \Big(\sum_{j\in I} x_j\Big) \leq y \cdot \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)$$

por lo que, teniendo en cuenta la definición de la suma indizada en J como un supremo, se tiene

$$\sum_{j\in J}(y \cdot x_j) \leq y \cdot \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)$$

Queda por demostrar que también

$$y \cdot \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \leq \sum_{j\in J}(y \cdot x_j)$$

desigualdad que es verdadera. Ahora, para que el primer miembro $y \cdot \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)$ sea 0, es cuando $y = 0$ o en el caso en que todos los x_j son 0 y el segundo miembro $\sum_{j\in J}(y \cdot x_j)$ es igual a $+\infty$, en caso que $y = +\infty$ sin que todos los x_j son iguales a 0. Queda comprobar esta desigualdad en el caso donde y es diferente de 0 y de $+\infty$. Ahora, aplicando la desigualdad ya demostrada con $1/y$ en lugar de y e $y \cdot x_j$ en lugar de x_j se obtiene

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{j\in J}\Big(\frac{1}{y} \cdot y \cdot x_j\Big) \leq \frac{1}{y} \cdot \sum_{j\in J}(y \cdot x_j)$$

y multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por y se obtiene

$$y \cdot \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \leq \sum_{j\in J}(y \cdot x_j)$$

como se quería probar.

Proposición 2.15 (Producto de dos Sumatorias)**.** Sean $(x_j)_{j\in J}$ y $(y_k)_{k\in K}$ dos familias finitas o infinitas de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Se tiene

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k\in K} y_k\Big) = \sum_{(j,k)\in J\times K} (x_j\cdot y_k).$$

Prueba. Por la propiedad de la distributividad por derecha, distributibidad por izquierda y la propiedad de Fubini para sumatorias respectivamente se tiene

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k\in K} y_k\Big) = \sum_{j\in J}(x_j\cdot\sum_{k\in K} y_k) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in K}(x_j\cdot y_k)\Big) = \sum_{(j,k)\in J\times K}(x_j\cdot y_k)$$

El resultado siguiente muestra que a pesar que el conjunto J de índices de una suma de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ es arbitrario, cuando la suma fuese finita, el subconjunto de índices que realmente importan es siempre contable.

Proposición 2.16. Sea $(x_j)_{j\in J}$ una familia de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ tal que $\sum_{j\in J} x_j < +\infty$, existe entonces un conjunto contable $J_0\subset J$ tal que $x_j = 0$, para cada $j\in J\setminus J_0$.

Prueba. Sin pérdida de generalidad tome el caso $J=\mathbb{N}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, el conjunto J_n, de los $j\in J$ tales que $x_j\geq 1/n$ es finito, a pesar que

$$\sum_{j\in J} x_j \geq \sum_{j\in J_n} x_j \geq \sum_{j\in J_n}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Entonces se puede considerar el conjunto contable J_0 como unión de los J_n y para cada $j\in J\setminus J_0$, se tiene $x_j<1/n$, para todo n y por tanto, $x_j=0$ ya que los x_j son reales extendidos no negativos y estos convergen a cero.

2.2 Medidas en σ-Álgebras

Definición 2.17 (σ-Álgebra)**.** Sea X un conjunto y J conjunto contable de índices. Se dice que una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X es una *σ-Álgebra* o *σ-Campo*, si se verifica:

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$;

2. Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $(X \setminus A) \in \mathcal{M}$;

3. Si para cada $j \in J,\ A_j \in \mathcal{M}$, entonces $\bigcup\limits_{j \in J} A_j \in \mathcal{M}$. [2]

Proposición 2.18 (Propiedades de σ-Álgebras)**.** Si $\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra de X, entonces se verifican

1. Si J es un conjunto contable, no vacio de índices y si para cada $j \in J$,$A_j \in \mathcal{M}$; entonces $\bigcap\limits_{j \in J} A_j \in \mathcal{M}$

2. $X \in \mathcal{M}$

3. Si $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$, entonces $A \setminus B$ también pertenece a $\mathcal{M}$.

Prueba.

1. La primera conclusión resulta de que se puede escribir la intersección de conjuntos en función de complemento y unión

$$\bigcap_{j \in J} A_j = X \setminus \bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j).$$

2. Esta conclusión resulta de tener $X = X \setminus \emptyset$ en función del complemento del vacío.

[2] En el caso $J = \emptyset$ la unión es considerada como el conjunto vacío, por lo que aceptar el concepto de familia vacía puede justificar el enunciado de la propiedad 1.

3. Resulta de usar la propiedad $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ en función de intersección y complemento.

Escolio 2.19. Tanto la clase $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ así como la misma clase $\mathcal{P}(X)$ son σ-Álgebras, que son mínima y máxima, respectivamente, en el sentido que cualquier σ-Álgebra de subconjuntos de X contiene a $\{\emptyset, X\}$ y está contenida en $\mathcal{P}(X)$, respectivamente.

Proposición 2.20 (σ-Álgebra restricción)**.** Dado X un conjunto y $\mathcal{M}$ una σ-Álgebra de X. Si $Y \subset X$ es un subconjunto que pertenece a $\mathcal{M}$; entonces la clase $\mathcal{M}_{|Y} \subset \mathcal{M}$, es una σ-Álgebra de Y a la que se le da el nombre de *restricción de la* σ-Álgebra $\mathcal{M}$ a Y y que considera implícitamente en Y .

Prueba. $\mathcal{M}_{|Y}$ es una σ-Álgebra en efecto

1. $\emptyset \in \mathcal{M}_{|Y}$ pues $\emptyset \subset Y$.

2. Resulta de la propiedad 3. en la Proposición 2.18, $A \in \mathcal{M}_{|Y} \Rightarrow Y \setminus A \in \mathcal{M}_{|Y}$, toda vez que se supone que $Y \in \mathcal{M}$.

3. $j \in J,\ A_j \in \mathcal{M}_{|Y}$, esto es ,si $A_j \subset Y$ entonces $\bigcup\limits_{j \in J} A_j \in \mathcal{M}_{|Y}$, pues $\bigcup_{j \in J} A_j \subset Y$ ambas resultan de la Definición 2.17.

Proposición 2.21 (σ-Álgebra generada)**.** Sea X un conjunto y $\mathcal{C}$ una familia de partes de X, entonces existe una σ-Álgebra $\mathcal{M}$ conteniendo a $\mathcal{C}$, que es mínima, en el sentido de estar contenida en cualquier σ-Álgebra que contenga a $\mathcal{C}$. A esta σ-Álgebra que es necesariamente única, se llama σ-Álgebra *generada* o *engendrada* por $\mathcal{C}$.

Prueba. Primero, sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ la familia de todos los subconjuntos de X que están en cualquier σ-Álgebra que contenga a $\mathcal{C}$; es decir, $\mathcal{M}$ es intersección de las σ-Álgebras que contienen a

$\mathcal{C}$. Se constata que $\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra que contiene a $\mathcal{C}$ y por construcción, la familia $\mathcal{M}$ está contenida en cualquier σ-Álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. La unicidad de una σ-Álgebra en estas condiciones, resulta por reducción al absurdo ya que si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ fuesen dos σ-Álgebras distintas con estas propiedades, tiene que ser que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ y $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}'$ (Absurdo). Por tanto debe ser que la σ-Álgebra $\mathcal{M}$ es única.

Notación 1. En lo que sigue, si $\mathcal{C}$ es una familia de partes de X, la σ-Álgebra generada por la familia $\mathcal{C}$ se denotará por $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ en vez de $\mathcal{M}$, para especificar dicha σ-Álgebra.

Lema 2.22. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$. En particular, si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Prueba. La primera afirmación se sigue del hecho que $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ es una σ-Álgebra conteniendo $\mathcal{E}$; pero $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ es la más pequeña conteniendo a $\mathcal{E}$. La segunda afirmación se sigue de la primera, observando que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

2.3 σ-Álgebra de Borel o la σ-Álgebra de los Borelianos

Hay dos colecciones importantes de ejemplos en esta construcción. La primera al σ-Álgebra en cualquier espacio topológico X y la segunda es la σ-Álgebra de Borel en $\mathbb{R}$.

Definición 2.23 (Borelianos)**.** Si X es un espacio topológico, se llama *Conjuntos de Borel* de X o simplemente *Borelianos* de X y a los subconjuntos que pertenecen a la σ-Álgebra generada por la topología, denotada por $\mathcal{B}_X$ a la que se le da naturalmente el nombre de *σ-Álgebra de los Borelianos* de X.

A continuación, se especifican los Borelianos en $\mathcal{B}_X$ en los casos

1. El caso general, si X es cualquier espacio topológico, $\mathcal{B}_X$ incluye a todos abiertos de X, también a los conjuntos cerrados, toda vez que son complementos de conjuntos abiertos. Otros conjuntos de Borel son intersecciones contables de abiertos (llamados Conjuntos G_δ), uniones contables de conjuntos cerrados (llamados Conjuntos F_σ), uniones contables de conjuntos G_δ (llamados Conjuntos $G_{\delta\sigma}$), intersecciones contables de conjuntos F_σ (llamados Conjuntos $F_{\sigma\delta}$) y así inductivamente, se pueden construir las siguientes cadenas de clases de conjuntos borelianos más generales $G_{\delta\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta\sigma}, F_{\sigma\delta\sigma\delta}$, etc. Véase [Grabinsky, 2013]. La σ-Álgebra de los Borelianos $\mathcal{B}_X$, se construye por este proceso en etapas sucesivas; pero como requisito se precisa del conocimiento de los números ordinales e inducción transfinita, con la finalidad de demostrar que la cardinalidad de los borelianos es la misma que la del continuo. Cabe señalar que inducción finita no es suficiente para construir la σ-Álgebra de Borel. Véase [Fava and Zó, 2013].

2. En el caso particular que $X = \mathbb{R}$, todos los intervalos son bolerianos, ya sean conjuntos abiertos, cerrados o intersecciones de un abierto con un cerrado; por ejemplo $]a, b]$ es intersección del intervalo abierto $]a, +\infty[$ con el intervalo cerrado $]-\infty, b]$. Esto último quiere decir, si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es la topología usual de X, la σ-Álgebra de Borel es la σ-Álgebra engendrada por $\mathcal{U}$, i.e. $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{M}(\mathcal{U})$.

Ejemplo 2.24 (Borelianos en Topologías Extremas)**.** Sea X un conjunto, ¿Que serán los borelianos de X asociados a la topología discreta y los borelianos asociados a la topología caótica?. Cuando se considera un espacio topológico como espacio medible sin explicar qué σ-Álgebra considera, queda entendido que se trata de la σ-Álgebra $\mathcal{B}_X$ de los borelianos de X.

Recuérdese que la *topología discreta* en X es aquella formada por todos los subconjuntos de X, esta familia genera la σ-Álgebra total que es a su vez la σ-Álgebra de Borel generada por esta topología. Similarmente, la topología caótica o indiscreta es la topología conformada por $\emptyset$ y X, que es a su vez la σ-Álgebra de Borel generada por esta topología, muy distinta a la anterior. Mostrando que es importante señalar la topología cuando uno se refiere a los Borelianos de un conjunto.

Los siguientes resultados se tomaron de [Folland, 2013].

Proposición 2.25. Sea X cualquier espacio topológico. Denótese por $\mathcal{U}$ la familia de partes abiertas de X y denote $\mathcal{C}$ la familia de partes cerradas de X, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{U}) = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Prueba. Puesto que el complemento de todo abierto es un cerrado y viceversa y como el Lema 2.22 exige una de las familias estén contenidas en la σ-Álgebra de la otra familia, entonces se concluye las inclusiones exigidas.

Proposición 2.26. Sean $a, b \in X = \mathbb{R}$. La σ-Álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es generada por cualquiera de las siguientes familias de intervalos

1. El conjunto de los intervalos abiertos $\mathcal{E}_1 = \{]a, b[\subset \mathbb{R} \mid a < b\}$;

2. El conjunto de intervalos cerrados $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$;

3. El conjunto de intervalos semiabiertos $\mathcal{E}_3 = \{]a, b] \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$ o

   $\mathcal{E}_4 = \{[a, b[\subset \mathbb{R} \mid a < b\}$;

4. El conjunto de los rayos abiertos $\mathcal{E}_5 = \{]a, +\infty[\subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\}$ o

   $\mathcal{E}_6 = \{] - \infty, a[\subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\}$;

5. El conjunto de los rayos cerrados $\mathcal{E}_7 = \{[a, +\infty[\subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\}$ o

   $\mathcal{E}_8 = \{]-\infty, a] \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Prueba. Los elementos de $\mathcal{E}_j$, para $j \neq 3, 4$ son abiertos o cerrados; los elementos de $\mathcal{E}_4$ son intersecciones enumerables de abiertos (por ejemplo, $[a, b[= \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}]a - 1/n, b[$). Todos estos conjuntos son conjuntos de Borel (Proposición 2.18 parte 4). Luego por el Lema 2.22 se sigue que $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Por otra parte todo abierto en $\mathbb{R}$ es reunión enumerable de intervalos abiertos, luego nuevamente por el Lema 2.22, se tiene $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$. Similarmente se prueba que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$ para $j \geq 2$ mostrando que todos los intervalos abiertos están en $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$. Por ejemplo tome el intervalo $]a, b[= \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [a - 1/n, b + 1/n] \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$.

Proposición 2.27 (Borelianos de un Subespacio Topológico)**.** Considere X un espacio topológico y $\mathcal{B}_X$ la σ-Álgebra de los Borelianos de X. Si $Y \subset X$ e $Y \in \mathcal{B}_X$, entonces la σ-Álgebra $\mathcal{B}_Y$ de los borelianos de Y, generada por la topología inducida, coincide con la σ-Álgebra restricción $\mathcal{B}_{X|Y}$.

Prueba. Sea V un abierto relativo en Y, entonces $V = Y \cap U$, para cierto U abierto en X y la intersección de estas es un abierto contenido en Y, en particular V es un boreliano en X, pues es intersección de dos borelianos, i.e. $V \in \mathcal{B}_{X|Y}$. Toda vez que la σ-Álgebra $\mathcal{B}_Y$, de los borelianos de Y es la σ-Álgebra más pequeña de partes de Y que contiene los abiertos de Y, se concluye que $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}_{X|Y}$.

Considere ahora

$$\mathcal{M} = \{A \subset X \mid A \cap Y \in \mathcal{B}_Y\}.$$

Teniendo en cuenta las siguientes igualdades $\emptyset \cap Y = \emptyset$, $(X \setminus A) \cap Y = Y \setminus (A \cap Y)$ y $(\bigcup_{j\in J} A_j) \cap Y = \bigcup_{j\in J}(A_j \cap Y)$, se concluye que $\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra de partes de X, la cual contiene los abiertos U de X, para los cuales $U \cap Y$ es abierto en Y, en particular pertenece a $\mathcal{B}_Y$ y que en realidad $A \in \mathcal{B}_{X|Y} = \mathcal{M}$. Se concluye que $A = A \cap Y \in \mathcal{B}_Y$, lo que muestra que $\mathcal{B}_{X|Y} \subset \mathcal{B}_Y$, ($\mathcal{B}_{X|Y}$ es el boreliano de X restringido a Y).

Definición 2.28 (Medida en una σ-Álgebra)**.** Considere el conjunto X y $\mathcal{M}$ una σ-Álgebra de subconjuntos de X. Se llama *medida* en la σ-Álgebra $\mathcal{M}$ a una aplicación $\mu\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que satisface las siguientes propiedades

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. (Aditividad enumerable) Dada una familia contable de conjuntos $(A_j)_{j\in J}$ disjuntos dos a dos en $\mathcal{M}$,
$$\mu\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \sum_{j\in J} \mu(A_j).$$

$(X, \mathcal{M})$ se llama *espacio medible*, los conjuntos en $\mathcal{M}$ se llaman conjuntos medibles, mientras que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es llamado *espacio de medida*. Toda medida definida en la σ-Álgebra de Borel de X, se llama *Medida Boreliana* o *Medida de Borel*.

Aditividad enumerable implica *aditividad finita* (tomando $E_j = \emptyset$ para $j > n$): Si $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$ son disjuntos, entonces
$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j).$$
Una aplicación que satisface 1. y a lo más la aditividad finita se llama *medida finitamente aditiva*.

Definición 2.29. Considere $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. La medida μ se llama *finita* si $\mu(X) < +\infty$ y que μ es una probabilidad si $\mu(X) = 1$.

Si se puede escribir X como unión enumerable de conjuntos con medida finita; esto es si, $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, con $\mu(E_j) < +\infty, \forall j \in J$, entonces se dice que μ es una medida *σ-Finita*. En general, cualquier conjunto medible E que puede ser escrito como unión enumerable de conjuntos con medida finita se llama *conjunto σ-Finito*.

Si para cada conjunto medible E con $\mu(E) = +\infty$ existe un conjunto medible $F \subset E$, tal que $0 < \mu(F) < +\infty$, se dice que μ es una *Medida semifinita*.

En particular, para cualquier μ medida finita, entonces $\mu(E) < +\infty$, para todo conjunto medible E. Toda medida σ-Finita es semifinita, pero la recíproca no es cierta. La mayoría de los las medidas que aparecen en la práctica son σ-Finitas.

Lema 2.30. Sean X y $(A_j)_{j\in J}$ una familia contable de partes de X. Existe entonces otra familia $(A'_j)_{j\in J}$ de partes de X, disjuntas dos a dos, con $A'_j \subset A_j$ y $\bigcup_{j\in J} A'_j = \bigcup_{j\in J} A_j$, donde cada A'_j es de la forma

$$A'_j = A_j \setminus A''_j = A_j \cap (X \setminus A''_j),$$

con A''_j unión de un número finito de A_k y $k < j$. En particular, el caso que $\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra de partes de X con $A_j \in \mathcal{M}$, para cada $j \in J$, se tiene $A'_j \in \mathcal{M}$, para cada $j \in J$.

Prueba. El hecho que J sea contable, permite sin pérdida de generalidad una composición con una biyección de $\mathbb{N}$ o de un conjunto del tipo $\{1, \ldots, N\}$ sobre J, otra enumeración y examinar a lo más los casos en que $J = \mathbb{N}$ o $J = \{1, \ldots, N\}$. En estos casos defina recursivamente

$A'_1 = A_1$ y para $j > 1$,

$$A'_j = A_j \setminus \bigcup_{k<j} A_k,$$

ya que cada $x \in \bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} A'_j$ pertenecerá a un único $A'_j \subset A_j$, disjunto de lo demás A'_j (pues ellos son disjuntos dos a dos); a saber, el correspondiente al mínimo de los j tales que $x \in A_j$ (Definición de unión de una familia).

Proposición 2.31 (Propiedades de Medidas)**.** Considere un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, se tiene entonces

1. (Monotonía) Sean $A, B \in \mathcal{M}$, con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$, en el caso que $\mu(B) < +\infty,\ \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$; en particular, si la medida μ es finita, μ toma valores en $\mathbb{R}_+$ y si μ es una probabilidad, μ toma valores entre $[0, 1]$.

2. (Subaditividad) Cualquiera sea la familia contable $(A_j)_{j\in J}$ de conjuntos en $\mathcal{M}$ no necesariamente disjuntos dos a dos,
$$\mu\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) \leq \sum_{j\in J} \mu(A_j).$$

3. (Continuidad por Abajo) Siendo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión cresciente de subconjuntos en $\mathcal{M}$ (esto es, suponiendo que $A_n \subset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), se tiene
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \lim \mu(A_n).$$

4. $A, B \in \mathcal{M}$, implica $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

5. (Continuidad por Arriba) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos en $\mathcal{M}$ (esto es, $A_n \supset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$) y asumiendo que $\mu(A_1) < +\infty$, entonces

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim \mu(A_n).$$

Prueba.

1. Resulta del hecho que $B = A \cup (B \setminus A)$, tal que $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, por lo tanto $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Si $\mu(B) < +\infty$, entonces necesariamente $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) < +\infty$.

2. Por el Lema 2.30 y concluir que $\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} A'_j$, con $A'_j \in \mathcal{M}$, $A'_j \subset A_j$ y los A'_j disjuntos dos a dos, implicando $\mu(A'_j) \leq \mu(A_j)$, luego

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j\in J} A'_j\Big) = \sum_{j\in J} \mu(A'_j) \leq \sum_{j\in J} \mu(A_j).$$

3. Considere los conjuntos $B_p \in \mathcal{M}$, donde $p \in \mathbb{N}$, disjuntos dos a dos, definidos inductivamente por $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots$ es decir, $B_{p+1} = A_{p+1} \setminus A_p$, observando que $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p$ y que $\bigcup_{p\leq n} B_p = A_n$. Se tiene así, recordando la Proposición 2.9 (límite de sumas parciales)

$$\mu\Big(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p\Big) = \mu\Big(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p\Big) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \mu(B_p) = \lim \sum_{p=1}^{n} \mu(B_p) = \lim \mu(A_n).$$

4. Puesto que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, con $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ además $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, con $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, luego

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

5. Los conjuntos $A_1 \setminus A_n \in \mathcal{M}$ constituyen una sucesión creciente cuya unión es $A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y por las partes 1 (monotonía) y 3 (continuidad por abajo) de la Proposición 2.31

$$\mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim[\mu(A_1) - \mu(A_n)],$$

de donde

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu(A_1) - \lim[\mu(A_1) - \mu(A_n)] = \lim \mu(A_n).$$

Definición 2.32 (Restricción de una Medida)**.** Considere X un conjunto, $\mathcal{M}$ una σ-Álgebra de partes de X y la medida $\mu\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Si $Y \subset X$, con $Y \in \mathcal{M}$ y si se considera en Y una σ-Álgebra restricción $\mathcal{M}_{|Y}$, se obtiene una medida $\mu_{|Y}\colon \mathcal{M}_{|Y} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, llamada *Restricción* de μ a Y, definida por $\mu_{|Y}(A) = \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{M}_{|Y}$.

Proposición 2.33. Sean X un conjunto y $(\alpha_x)_{x\in X}$ una familia de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Se induce una medida μ en la σ-Álgebra $\mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X mediante

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \alpha_x.$$

Prueba.

1. En la Definición 2.28 y por la Definición 2.6 (recursión de las sumatorias finitas para el caso base $J = \emptyset$), se tiene que $\mu(\emptyset) = \sum_{x\in\emptyset} \alpha_x = 0$

2. Dada una familia $(A_j)_{j\in J}$ de subconjuntos de X, disjuntos dos a dos entonces por la definición de μ y la Proposición 2.12 (Propiedad asociativa), se tiene que

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \sum_{x\in\cup_{j\in J} A_j} \alpha_x = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{x\in A_j} \alpha_x\Big) = \sum_{j\in J} \mu(A_j).$$

Escolio 2.34.

1. Sea X un conjunto arbitrario y considere $(\alpha_x)_{x\in X}$ con $\alpha_x = 1$, para cada $x \in X$. La medida ν en la σ-Álgebra $\mathcal{P}(X)$, de todos los subconjuntos de X, asociada a esta familia, se le da el nombre de *medida de conteo*. La razón de este nombre es que, como se desprende de la línea a) de la Proposición 2.5 y la Definición 2.7 para cada $A \subset X$ finito, $\nu(A)$ es el número de elementos de A y para cada $A \subset X$ infinito, $\nu(A) = +\infty$.

2. Sea X un conjunto arbitrario y $x_0 \in X$ un elemento fijo considerando la familia $(\alpha_x)_{x\in X}$ con $\alpha_x = 1$, si $x = x_0$ y $\alpha_x = 0$, si $x \neq x_0$, a la medida μ_{x_0} de la σ-Álgebra $\mathcal{P}(X)$, de todos los subconjuntos de X, asociada a esta familia se le da el nombre de *medida de Dirac* correspondiente al punto x_0. Recuérdese que, como se constata fácilmente, para cada $A \subset X$ se tiene $\mu_{x_0}(A) = 1$, si $x_0 \in A$ y $\mu_{x_0}(A) = 0$, si $x_0 \notin A$.

3. Sea X un conjunto arbitrario y consideremos la familia $(\alpha_x)_{x\in X}$ con $\alpha_x = 0$, para cada x, la medida correspondiente μ de la σ-Álgebra $\mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X se trata de la *medida idénticamente nula*, con $\mu(A) = 0$, para cada A.

Proposición 2.35 (Construcción trivial de otras medidas)**.** Considere X un conjunto, $\mathcal{M}$ una σ-Álgebra de subconjuntos de X, $\mu, \mu' \colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dos medidas y $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Tienen lugar las medidas $\mu + \mu' \colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $a\mu \colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, definidas por

$$(\mu + \mu')(A) = \mu(A) + \mu'(A), \quad (a\mu)(A) = a\mu(A).$$

Prueba. Son consecuencias directas de sumas no finitas de la Propiedad de Fubini y Distributividad. En efecto, se prueban las dos condiciones

1. $(\mu+\mu')(\emptyset)=\mu(\emptyset)+\mu'(\emptyset)=0+0=0$ y por otra parte $(\alpha\mu)(\emptyset)=\alpha\mu(\emptyset)=\alpha\cdot 0=0$.

2. $(\mu+\mu')(\bigcup\limits_{j\in J}A_j)=\mu(\bigcup\limits_{j\in J}A_j)+\mu'(\bigcup\limits_{j\in J}A_j)=\sum_{j\in J}\mu(A_j)+\sum_{j\in J}\mu'(A_j)=$
   $=\sum_{j\in J}[\mu(A_j)+\mu'(A_j)]=\sum_{j\in J}(\mu+\mu')(A_j)$ y por otra parte
   $(\alpha\mu)(\bigcup\limits_{j\in J}A_j)=\alpha\mu(\bigcup\limits_{j\in J}A_j)=\alpha\sum_{j\in J}\mu(A_j)=\sum_{j\in J}\alpha\mu(A_j)$.

Definición 2.36 ($\mathcal{E}$-Intervalos semiabiertos)**.** Considere un conjunto $\emptyset\neq\mathcal{E}\subset\mathbb{R}$, se llaman *$\mathcal{E}$-Intervalos Semiabiertos* (o simplemente *intervalos semiabiertos*, si $\mathcal{E}=\mathbb{R}$) a los intervalos de $\mathbb{R}$ de la forma

$$]a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\},$$

donde $a,b\in\mathcal{E}$. No se hace restricción alguna sobre la relación de orden sobre el conjunto de los números reales a y b; pero si $a\geq b$, se tiene $]a,b]=\emptyset$.

Cualquier $\mathcal{E}$-Intervalo semiabierto puede ser escrito de la forma $]a,b]$ con $a\leq b$ en $\mathcal{E}$ y tal representación es única, en el caso de los intervalos semiabiertos no vacíos, entonces b debe ser el máximo del intervalo y a su ínfimo. Es trivial que el conjunto vacío admite infinitas representaciones de la forma $\emptyset=]a,a]$, con $a\in\mathcal{E}$ arbitrario.

Proposición 2.37. Dado un conjunto $\emptyset\neq\mathcal{E}\subset\mathbb{R}$, entonces la clase $\mathcal{S}$ de los $\mathcal{E}$-Intervalos semiabiertos de $\mathbb{R}$, que tiene al conjunto vacío en él, verifica la siguiente propiedad:
Si $A,B\in\mathcal{S}$, entonces $A\cap B\in\mathcal{S}$ y existen $C,D\in\mathcal{S}$, con $C\cap D=\emptyset$, tales que $A\backslash B=C\cup D$.

Prueba. Suponga que $A=]a_1,b_1]$ y $B=]a_2,b_2]$, donde ya se asume que $a_2\leq b_2$. Entonces, $A\cap B=\{x\in\mathbb{R}\mid a_1<x\leq b_1\wedge a_2<x\leq b_2\}=]a,b]$, donde

$$a=\max\{a_1,a_2\},\ b=\min\{b_1,b_2\}$$

Además

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid a_1 < x \leq b_1 \wedge (x \leq a_2 \vee x > b_2)\} =]a_1, b'] \cup]a', b_1],$$

con $b' = \min\{b_1, a_2\}$ y $a' = \max\{a_1, b_2\}$, obteniéndose que,

$$b' \leq a_2 \leq b_2 \leq a' \Rightarrow]a_1, b'] \cap]a', b_1] = \emptyset.$$

Definición 2.38 (Semianillo)**.** Sea X un conjunto cualesquiera. Se dice que una familia $\mathcal{S}$ de partes de X es un *Semianillo* si se verifican las siguientes propiedades

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$,

2. Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$,

3. $A, B \in \mathcal{S}$, implica que existe una familia finita $(C_i)_{i \in I}$, de conjuntos en $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos, tal que
$$A \setminus B = \bigcup_{i \in I} C_i.$$

En particular, toda σ-Álgebra es un semianillo por la Condición 3. En efecto, se puede considerar una familia formada por el único conjunto $A \setminus B$. Si $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ es no vacío, la clase de los $\mathcal{E}$-intervalos semiabiertos de $\mathbb{R}$ es un semianillo, no es una σ-Álgebra pues falla por ejemplo la propiedad 3. Tome dos intervalos no vacíos semiabiertos disjuntos. Su unión no es intervalo semiabierto.

Proposición 2.39. Considere X un conjunto y $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de X. Si $(C_i)_{i \in I}$ es una familia finita no vacía de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{S}$, entonces $\bigcap_{i \in I} C_i \in \mathcal{S}$.

Prueba. Se trata de una consecuencia directa de la Definición de semianillo, línea 2. Por inducción sobre el número de elementos, mayor o igual a 1, del conjunto de índices. En efecto, para el caso que I tenga un sólo elemento es trivial, para $|I| = 2$, se desprende de la definición de semianillo línea 2. Ahora suponga que la afirmación es cierta para $|I|-1$, entonces aplicando la propiedad para $|I|$, tomando un número $|I| - 1$ finito de veces la definición de semianillo línea 2 para dos conjuntos, se tiene demostrada la proposición.

Proposición 2.40 (El Anillo asociado)**.** Considere X un conjunto y $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de X, denote por $\mathcal{A}$ la clase de subconjuntos de X que es unión de alguna familia finita de conjuntos $(C_i)_{i\in I}$ disjuntos dos a dos que pertenecen a $\mathcal{S}$. Se tiene entonces que la familia $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{S}$ y cumple las siguientes propiedades

1. Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia no vacía de conjuntos en una clase $\mathcal{A}$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
3. Si $(A_i)_{\in I}$ es familia finita elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Se dice que la familia $\mathcal{A}$ es *Anillo* asociado al semianillo $\mathcal{S}$.

Prueba. En efecto, $\mathcal{A} \supset \mathcal{S}$, puesto que cada $A \in \mathcal{S}$, se expresa como reunión de una familia constituida por un único conjunto A. Por la definición de la familia $\mathcal{A}$, resulta que si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{A}$, disjuntos dos a dos, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ lo que es menos exigente que la afirmación 3. Ya que no se exige que los conjuntos sean disjuntos dos a dos.

1. Resulta por inducción sobre el número de elementos de I, siempre y cuando se muestre que si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$. Siendo $A = \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ y $B = \bigcup\limits_{j\in J} D_j$, donde $(C_i)_{i\in I}$ y

$(D_j)_{j\in J}$ son dos familias finitas de conjuntos de $\mathcal{S}$, en ambos casos disjuntos dos a dos, se tiene

$$A \cap B = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (C_i \cap D_j),$$

donde los conjuntos $C_i \cap D_j$ están en $\mathcal{S}$, en ambos casos disjuntos dos a dos.

2. Primero examinar el caso particular en que $A \in \mathcal{S}$ y $B \in \mathcal{A}$. Ahora, evitando el caso trivial en que $B = \emptyset$ y por tanto $A \setminus B = A$, se puede escribir $B = \bigcup\limits_{j\in J} D_j$, donde $(D_j)_{j\in J}$ es una familia finita no vacía de elementos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos, se tiene entonces

$$A \setminus B = \bigcap_{j\in J}(A \setminus D_j),$$

donde por la propiedad 3. de semianillos, cada $A\setminus D_j$ está en $\mathcal{A}$ y por tanto, teniéndose en cuenta la propiedad 1 ya demostrada, luego $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Supóngase ahora que $A, B \in \mathcal{A}$. Se escribe como $A = \bigcup\limits_{i\in I} C_i$, donde $(C_i)_{i\in I}$ es la familia de los conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{S}$ y por tanto $A \setminus B = \bigcup\limits_{i\in I}(C_i \setminus B)$, con $C_i \setminus B$ disjuntos dos a dos y como se vió el caso particular ya estudiado, cada $C_i \setminus B \in \mathcal{A}$. Como se refiere al inicio, de ello se deduce que $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

3. Ya que $\emptyset \in \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, se puede probar la tercera condición por el método por inducción sobre el número de elementos de I. Para eso, se debe mostrar que, si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$. Esto resulta una vez más de lo que se dijo al inicio, una vez que se tiene $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, donde los conjuntos A y $B \setminus A$ pertenecen a $\mathcal{A}$ y son disjuntos.

Definición 2.41 (Medida en un semianillo)**.** Considere X un conjunto y $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de X. Se dice que la aplicación $\mu\colon \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es la medida si se verifican las propiedades

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. (Aditividad) Cualquiera que sea la familia contable $(A_j)_{j\in J}$ de conjuntos disjuntos dos a dos, pertenecientes a $\mathcal{S}$, tal que $\bigcup\limits_{j\in J} A_j \in \mathcal{S}$,

$$\mu(\bigcup_{j\in J} A_j) = \sum_{j\in J} \mu(A_j).$$

Proposición 2.42 (Propiedades)**.** Considere X un conjunto, S un semianillo de partes de X y $\mu: \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida. Se tiene

1. Si $(A_j)_{j\in J}$ es la familia de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{S}$, si $B \in \mathcal{S}$ y si $\bigcup\limits_{j\in J} A_j \subset B$, entonces

$$\sum_{j\in J} \mu(A_j) \leq \mu(B).$$

2. Monotonía: Si $A, B \in \mathcal{S}$ y $A \subset B$, implica que $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. Si $A \in \mathcal{S}$ y $(B_j)_{j\in J}$ es la familia contable de conjuntos $\mathcal{S}$ (no necesariamente disjuntos dos a dos) tal que $A \subset \bigcup\limits_{j\in J} B_j$, entonces

$$\mu(A) \leq \sum_{j\in J} \mu(B_j).$$

Prueba.

1. Notando que una suma arbitraria es el supremo de todas las sumas parciales finitas, para mostrar 1 basta examinar el conjunto de índices J sea finito. En este caso se deduce de las propiedades 2 y 3 de la Proposición 2.40 que $B \setminus \bigcup\limits_{j\in J} A_j$ está en el anillo generado $\mathcal{A}$, esto es

$$B \setminus \bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{k\in K} C_k,$$

para cierta familia finita $(C_k)_{k\in K}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$, disjuntos dos a dos. Entonces B será la unión de los conjuntos A_j y C_k de $\mathcal{S}$, disjuntos dos a dos, por lo que aplicando la propiedad asociativa de sumas finitas,

$$\mu(B) = \sum_{j\in J} \mu(A_j) + \sum_{k\in K} \mu(C_k)$$

y por tanto $\sum_{j\in J} \mu(A_j) \leq \mu(B)$.

2. Este es un caso particular de la parte 1 en la que se considera para $(A_j)_{j\in J}$ una familia con un único elemento A.

3. Para la demostración de 3. Se tiene $A = \bigcup\limits_{j\in J} A_j$, con $A_j = A \cap B_j$, y considerando $A_j \subset B_j$ y $A_j \in \mathcal{S}$. Teniendo en cuenta el Lema 2.30, se puede también escribir $A = \bigcup\limits_{j\in J} A'_j$, con $A'_j \subset A_j$ y los A'_j disjuntos dos a dos, donde cada A'_j, a pesar de estar en $\mathcal{S}$, está por la Proposición 2.40, la la clase $\mathcal{A}$ referida en ese resultado, esto es

$$A'_j = \bigcup_{k_j\in K_j} C_{j,k_j},$$

para ciertas familias $(C_j, k_j)_{k_j\in K_j}$ de conjuntos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos. Por la Propiedad 3 ya demostrada,

$$\sum_{k_j\in K_j} \mu(C_{j,k_j}) \leq \mu(B_j).$$

Se debe tener

$$A = \bigcup_{j\in J} A'_j = \bigcup_{j\in J} \Big(\bigcup_{k_j\in K_j} C_{j,k_j} \Big),$$

con los conjuntos $C_{j,k_j} \in \mathcal{S},\ j \in J$ y $k_j \in K_j$, disjuntos dos a dos, se concluye finalmente teniendo en cuenta la Propiedad asociativa en la Proposición 2.12 que

$$\mu(A) = \sum_{j\in J}(\sum_{k_j\in K_j} \mu(C_{j,k_j})) \leq \sum_{j\in J} \mu(B_j).$$

Definición 2.43 (Límites Laterales)**.** Sea $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto no vacío, con cada extremo finito o infinito[3] y $g\colon]c, d[\to \mathbb{R}$ una función creciente (en el sentido amplio). Recuérdese que para cada $a \in J$, una función g admite límites laterales a izquierda y a derecha finitos, denotados por $g(a^-)$ y $g(a^+)$, que son respectivamente iguales al supremo de los $g(x)$ con $x < a$ y el ínfimo de los $g(x)$ con $x > a$ y se tiene que

$$g(a^-) \leq g(a) \leq g(a^+).$$

Análogamente, g admite límite a derecha $g(c^+)$ finito o $-\infty$ y límite a la izquierda $g(d^-)$, finito o $+\infty$ es igual respectivamente al ínfimo y al supremo de los $g(x)$.

Proposición 2.44. Si $g\colon]c, d[\to \mathbb{R}$ es una función creciente entonces el conjunto de puntos $x \in]c, d[$ donde g es discontinua, esto es $g(x^-) \neq g(x^+)$ es contable.

Prueba. Para cada x donde g es continua, se puede considerar un número racional r_x que verifique $g(x^-) \leq r_x \leq g(x^+)$, entonces la función que a x asocia r_x es inyectiva del conjunto de puntos de discontinuidad para el conjunto enumerable de números racionales. Por tanto, dicho conjunto de puntos de discontinuidad es contable.

Lema 2.45 (Importancia que un conjunto de índices sea contable)**.** Sea $\bar{I}$ un conjunto contable de índices y $\delta > 0$. Existe entonces una familia $(\delta_j)_{j\in\bar{I}}$ de números $\delta_j > 0, \forall j \in \bar{I}$ tal que $\sum_{j\in\bar{I}} \delta_j \leq \delta$

[3] El conjunto $\mathcal{E}$ puede ser además de $\mathbb{R}$, un intervalo de uno de los tipos $]a, b[$, con $a < b$ en $\mathbb{R}$, $]a, +\infty[$ o $]-\infty, a[$, con $a \in \mathbb{R}$.

Prueba. Sean $\bar{I}$ un conjunto contable y $\delta > 0$ arbitrario, haciendo un cambio en el conjunto de índices, se puede suponer que $\bar{I} = \mathbb{N}$ o $\bar{I} = \{1, \ldots, N\}$. Basta definir $\delta_j = \delta/2^j$, recordando la caracterización de suma de términos de una serie geométrica:

$$\sum_{j\in\bar{I}} \delta_j = \delta \sum_{j\in\bar{I}} 2^{-j} \leq \delta.$$

Definición 2.46 (La medida de Lebesgue-Stieltjes de intervalos semiabiertos)**.** Sea $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto no vacío con cada extremo finito o infinito y $g: J \to \mathbb{R}$ una función creciente, tiene lugar otra medida λ_g en el semianillo $\mathcal{S}$ de los J-intervalos semiabiertos, definida por

$$\lambda_g(]a, b]) = g(b^+) - g(a^+)$$

siempre que $a \leq b$[4]. Se dice que ésta es *medida de Lebesgue-Stieltjes* asociada a la función g. En el caso particular en que $J = \mathbb{R}$ y $g(x) = x$, la correspondiente medida λ, definida por $\lambda(]a, b]) = b - a$, si $a \leq b$, se llama *medida de Lebesgue*.

Proposición 2.47. Si $\lambda_g: \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una aplicación definida en el semianillo $\mathcal{S}$ de los J-intervalos semiabiertos establecida en la Definición 2.46, entonces ella es una medida.

Prueba. Se dividirá la demostración en cuatro partes:

Parte 1 El hecho que la aplicación λ_g está bien definida, resulta de lo siguiente:

$$\lambda_g(\emptyset) = \lambda_g(]a, a]) = g(a^+) - g(a^+) = 0, \forall a \in J.$$

[4]Note que en el caso de la función creciente g es continua a derecha, se puede escribir simplemente, $\lambda_g(]a, b]) = g(b^+) - g(a^+)$. Es frecuente hacer esta exigencia suplementaria sobre la función g lo que no disminuye la clase de las medidas de Lebesgue-Stieltjes

Parte 2 Se va a probar la siguiente propiedad de superaditividad finita: Si $A =]a, b]$ contiene a la unión de la familia finita de los conjuntos $A_j =]a_j, b_j]$, donde $j \in I$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\lambda_g(A) \geq \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j), \forall A \in \mathcal{S}.$$

En efecto, primero se prueba los casos triviales: Si $\exists j \in I$, tal que $A_j = \emptyset$, entonces se retira de la familia a A_j y si $I = \emptyset$, entonces

$$\sum_{j \in \emptyset} \lambda_g(A_j) = 0 \leq \lambda_g(A).$$

Ahora se demuestra por inducción sobre el cardinal de I: Para $|I| = 1$, entonces I tiene a lo más un elemento j, se tiene que $A \supset A_j$, donde $a \leq a_j$ y $b \geq b_j$ y se obtiene

$$\lambda_g(A) = g(b^+) - g(a^+) \geq g(b_j^+) - g(a_j^+) = \lambda_g(A_j).$$

Suponga que la afirmación vale para $|I| = n$. Por demostrar, cuando I tiene $n + 1$ elementos: Sea j_0 índice para el cual b_j es máximo y nótese que $a_{j_0} \leq a, b \leq b_{j_0}$ y para cada $j \neq j_0,\ b_j < a_{j_0}$, sin que b_j pertenezca a $A_j \cap A_{j_0}$. Se concluye de aquí que $]a, a_{j_0}]$ contiene la unión de los A_j, con $j \neq j_0$, donde teniendo en cuenta la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned}\lambda_g(A) =& g(b^+) - g(a^+) \geq g(b_{j_0}^+) - g(a_{j_0}^+) + g(a_{j_0}^+) - g(a^+) = \\ &= \lambda_g(A_{j_0}) + \lambda_g(]a, a_{j_0}]) \geq \lambda_g(A_{j_0}) + \textstyle\sum_{j \neq j_0} \lambda_g(A_j) = \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j).\end{aligned}$$

Parte 3 Se va a probar ahora la siguiente propiedad de subaditividad finita: Si $A =]a, b]$ está contenida en la unión de la familia finita de los conjuntos $A_j =]a_j, b_j]$, donde $j \in I$, no necesariamente disjuntos dos a dos, entonces

$$\lambda_g(A) \leq \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j).$$

En efecto, similarmente a la parte 2. Se retiran de I los índices j para los cuales $A_j = \emptyset$. Se puede también discriminar el caso trivial en que $A = \emptyset$, también se puede dar el caso en que $A = \emptyset$, caso en el que el primer miembro de la desigualdad es 0. Por inducción matemática sobre el número de elementos del conjunto de índices I. Si I tiene a lo más un elemento j, se tiene $A \subset A_j$, lo que implica que $b \leq b_j$ y $a_j \leq a$, donde

$$\lambda_g(A) = g(b^+) - g(a^+) \leq g(b_j^+) - g(a_j^+) = \lambda_g(A_j).$$

Supóngase que la desigualdad se verifica cuando I tiene n elementos y se prueba cuando I tiene $n+1$ elementos. Toda vez que $b \in A$, existe j_0, tal que $b \in A_{j_0} =]a_{j_0}, b_{j_0}]$, en particular $b \leq b_{j_0}$. Si fuese $a_{j_0} \leq a$, se tiene trivialmente

$$\lambda_g(A) = g(b^+) - g(a^+) \leq g(b_{j_0}^+) - g(a_{j_0}^+) = \lambda_g(A_{j_0}) \leq \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j),$$

Sino, $a_{j_0} \geq b$ y el intervalo $]a, b]$ está contenido en la unión de los A_j, con $j \neq j_0$, donde por la hipótesis inductiva

$$\lambda_g(A) \leq \sum_{j \neq j_0} \lambda_g(A_j) \leq \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j),$$

o $a_{j_0} < b$ y se puede aplicar la hipótesis inductiva al intervalo $]a, a_{j_0}]$, que está contenido en la unión de los A_j, con $j \neq j_0$, teniéndose

$$\begin{aligned}\lambda_g(A) =& g(b^+) - g(a^+) \leq g(b_{j_0}^+) - g(a_{j_0}^+) + g(a_{j_0}^+) - g(a^+) \\ =& \lambda_g(A_{j_0}) + \lambda_g(]a, a_{j_0}]) \leq \lambda_g(A_{j_0}) + \textstyle\sum_{j \neq j_0} \lambda_g(A_j) = \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j)\end{aligned}$$

Parte 4 Ahora se va probar que si $A =]a, b]$ es la unión de la familia contable de conjuntos $A_j =]a_j, b_j]$, donde $j \in \bar{I}$ disjuntos dos a dos, entonces se tiene

$$\lambda_g(A) = \sum_{j \in \bar{I}} \lambda_g(A_j)$$

En efecto el caso trivial $A = \emptyset = \cup_{j\in\bar{I}} A_J$, entonces $A_j = \emptyset, \forall j \in I$ y se cumple que $0 = \lambda_g(A) = \sum_{j\in\bar{I}} \lambda_g(A_j) = 0$.

Para cada $I \subset \bar{I}$ finito, A contiene la unión de los A_j con $j \in J$ por lo que teniendo en cuenta lo que se vió en lla línea 2, $\lambda_g(A) \leq \sum_{j\in I} \lambda_g(A_j)$. Teniendo en cuenta la definición de la suma, para $j \in \bar{I}$, como supremo de todas las sumas finitas, se concluye que

$$\lambda_g(A) \leq \sum_{j\in\bar{I}} \lambda_g(A_j)$$

Para probar la igualdad suponga por el absurdo que $\lambda_g(A) > \sum_{j\in\bar{I}} \lambda_g(A_j)$ siendo

$$\delta = \lambda_g(A) - \sum_{j\in\bar{I}} \lambda_g(A_j) > 0.$$

Se aplica el Lema 2.45 para considerar la familia $(\delta_j)_{j\in\bar{I}}$ de reales $\delta_j > 0$ tales que $\sum_{j\in\bar{I}} \delta_j \leq \delta/2$ y fijar $a' \in J$, donde la función g sea continua, con $a < a' < b$ y $g(a') < g(a^+) + \delta/2$ para $j \in \bar{I}$, $b'_j \in j$ donde la función g sea continua, con $b_j < b'_j$ y $g(b'_j) < g(b_j^+) + \delta_j$ como el compacto $[a', b]$ de $\mathbb{R}$, está contenido en $]a, b] = \bigcup_{j\in\bar{I}}]a_j, b_j]$ y por tanto también la unión de los abiertos $]a_j, b'_j]$, con $j \in \bar{I}$, la propiedad de la cobertura de compactos asegura la existencia de una parte finita I de $\bar{I}$ tal que $[a', b] \subset \bigcup_{j\in\bar{I}}]a_j, b'_j[$ y por tanto, en su mayor parte por la razón, $A' =]a_j, b'_j]$. Se puede aplicar lo que se vió en 3; teniéndose

$$\begin{aligned}
\lambda_g(A) &= g(b^+) - g(a^+) < g(b^+) - g(a') + \delta/2 = \mu_g(A') + \delta/2 \leq \textstyle\sum_{j\in I} \lambda_g(A'_j) + \delta/2 \\
&= [\textstyle\sum_{j\in I} g(b'_j) - g(a_j^+)] + \frac{\delta}{2} \leq [\sum_{j\in I} g(b_j^+) - g(a_j^+)] + (\sum_{j\in I} \delta_j) + \delta/2 \\
&\leq [\textstyle\sum_{j\in\bar{I}} \lambda_g(A_j)] + \delta = \lambda_g(A).
\end{aligned}$$

Lo que es absurdo.

Proposición 2.48. Sea $\emptyset \neq J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto (por ejemplo $J = \mathbb{R}$) y se considera el semianillo $\mathcal{S}$ de los J-Intervalos semiabiertos. Teniéndose entonces que la σ-Álgebra de partes de J generada por $\mathcal{S}$ es la σ-Álgebra $\mathcal{B}_J$ de los borelianos de J.

Prueba. Denótese por $\mathcal{M}$ la σ-Álgebra de partes de J generada por $\mathcal{S}$. Note además que cada conjunto $]a, b] =]a, +\infty] \cap] - \infty, b]$ que pertenece a $\mathcal{S}$ es la intersección del abierto $]a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, con el cerrado $] - \infty, b]$ de $\mathbb{R}$, por lo que es un boreliano de $\mathbb{R}$ y por estar contenido en el boreliano J de $\mathbb{R}$, es también boreliano de J (Véase la Proposición 2.27 pues $\mathcal{B}_{\mathbb{R}|J} = \mathcal{B}_J$). Se tiene así $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_J$ y por ser $\mathcal{M}$ la σ-Álgebra más pequeña de partes de J que contiene $\mathcal{S}$, se tiene $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_J$.

Se verifica ahora que, para cada U abierto en J (y por tanto también en $\mathbb{R}$), por demostrar que existe una familia contable de J-intervalos semiabiertos cuya unión es U y por tanto $U \in \mathcal{M}$. Para eso considere la familia contable de todos los intervalos semiabiertos $]a, b]$, con a y b racionales, que están contenidos en U. Es claro que su unión está contenida en U. Por otro lado sea $y \in U$ arbitrario, se puede considerar $\varepsilon > 0$ tal que $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset U$, entonces elija racionales a y b tal que $y - \varepsilon < a < y < b < y + \varepsilon$, lo que implica que $y \in]a, b] \subset U$, es decir y pertenece a uno de los intervalos de la familia. Puesto que $\mathcal{B}_J$ es la más pequeña de la σ-Álgebra de subconjuntos J que la contiene cada abierto U de J y como se verificó $\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra en esas condiciones, se concluye que $\mathcal{B}_J \subset \mathcal{M}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_J = \mathcal{M}$ como se quería.

2.4 Extensión de Medidas

Definición 2.49. Considerese X un conjunto. Se dice *medida exterior* en X a la aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$,que verifica

1. La medida exterior del conjunto vacío es cero;
2. Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. $(A_j)_{j\in J}$ es la familia contable de subconjuntos X, implica que

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) \leq \sum_{j\in J} \mu^*(A_j).$$

Definición 2.50 (Cobertura Contable)**.** Considere X un conjunto, $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de X y $\mu\colon \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida. Para cada conjunto $A \subset X$, se llama *$\mathcal{S}$-Cobertura contable* de A a una familia contable $(A_j)_{j\in J}$ de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$, tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} A_J$. Definiendo entonces, para cada $A \subset X,\ \mu^*(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ siendo el ínfimo de las sumas $\sum_{j\in J} \mu(A_j)$ para las diferentes *$\mathcal{S}$-Coberturas contables* $(A_j)_{j\in J}$ de A, si estas existieran, y siendo $+\infty$ si A no admite ninguna $\mathcal{S}$-Cobertura contable.

Proposición 2.51. En las condiciones de la Definición 2.50, existe una medida $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, la cual extiende μ, en el sentido de tener $\mu^*(A) = \mu(A)$, para cada $A \in \mathcal{S}$. En este caso, se dice que μ^* es la *medida exterior* en X *asociada* a μ en el semianillo $\mathcal{S}$.

Prueba. Suponga que $A \in \mathcal{S}$. Teniendo en cuenta la línea 5 de la Proposición 2.42, para cada cobertura $\mathcal{S}$-cobertura contable $(A_j)_{j\in J}$ de A, se tiene $\mu(A) \leq \sum_{j\in J} \mu(A_j)$, de allí que, tomando ínfimo a ambos miembros, $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Una tales $\mathcal{S}$-coberturas contables de A está constituida por el único conjunto A, resultando que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ y por tanto, $\mu^*(A) = \mu(A)$. En particular, como $\emptyset \in \mathcal{S}$, se tiene $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Sean ahora A y B subconjuntos de X con $A \subset B$. Como toda $\mathcal{S}$-cobertura contable de B es también una $\mathcal{S}$-cobertura contable de A, se concluye que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Considere $(A_{j\in J})$ una familia contable de partes de X, se muestra que

$$\mu^*(\bigcup_{j\in J} A_j) \leq \sum_{j\in J} \mu^*(A_j),$$

para lo que se puede ya suponer que el segundo miembro no es $+\infty$. En particular, para cada $j \in J,\ \mu^*(A_j) \leq +\infty$. Sea $\delta > 0$ arbitrario. Por el Lema 2.45 se puede considerar, para cada, $j \in J,\ \delta_j > 0$ de modo que $\sum_{j\in J} \delta_j \leq \delta$. Para cada $j \in J$, considere una $\mathcal{S}$-cobertura contable $(B_{j,\gamma_j})_{\gamma_j\in\Gamma_j}$ de A_j tal que

$$\sum_{\gamma_j\in\Gamma_j} \mu(B_{j,\gamma_j}) \leq \mu^*(A_j) + \delta_j.$$

Se tiene entonces que la familia de todos los B_{j,γ_j}, con $j \in J$ y $\gamma_j \in \Gamma_j$, constituye una subcobertura contable de $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$, de donde se deduce, teniendo en cuenta la propiedad asociativa para sumatorias que

$$\mu^*(\bigcup_{j\in J} A_j) \leq \sum_{j\in J}\Big(\sum_{\gamma_j\in\Gamma_j} \mu(B_{j,\gamma_j})\Big) \leq \sum_{j\in J}[\mu^*(A_j)+\delta_j] = \sum_{j\in J}\mu^*(A_j)+\sum_{j\in J}\delta_j \leq \delta+\sum_{j\in J}\mu^*(A_j), \tag{2.3}$$

en particular, el primer miembro también es menor que $+\infty$. Teniendo en cuenta que $\delta > 0$ es arbitrario, se deduce que

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) \leq \sum_{j\in J} \mu^*(A_j),$$

puesto que, si eso no sucede, se puede elegir $\delta > 0$, con

$$\delta < \mu^*\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) - \sum_{j\in J} \mu^*(A_j),$$

lo que, sustituido en (2.3), conduce al absurdo $\mu^*(\bigcup\limits_{j\in J} A_j) < \mu^*(\bigcup\limits_{i\in J} A_j)$.

Definición 2.52 (Semianillo σ-Total)**.** Un semianillo de partes de X se llama σ-*Total* si y sólo si existe una familia contable $(X_j)_{j\in J}$, con $X_j \in \mathcal{S}, \forall J$ tal que $X = \bigcup\limits_{j\in J} X_j$.

En particular, si $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto no vacío con cada extremo finito o infinito, el semianillo de partes de J, constituido por los J-Intervalos semiabiertos $]a, b]$, con $a, b \in J$ (Cf. la Proposición 2.37) es un semianilllo σ-Total, ya que la clase de los intervalos para los cuales a y b son racionales constituyen una clase contable cuya unión es J ($\forall x \in J$, considere racionales a y b con $c < a < x$ y $x < b < d$ entonces $x \in]a, b]$, uno de los intervalos de clase).

Definición 2.53. Considere $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $g\colon J \to \mathbb{R}$ una función creciente y sea su medida de Lebesgue-Stieltjes correspondiente λ_g en el semianillo de los J-intervalos semiabiertos. La medida exterior $\lambda_g^*\colon \mathcal{P}(J) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ asociada a la medida λ_g se llama *medida exterior de Lebesgue-Stieltjes* asociada a la función g. En particular si $J = \mathbb{R}$ y $g(x) = x$, se obtiene una medida exterior $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ asociada a la medida de Lebesgue, que se llama *medida exterior de Lebesgue*.

Definición 2.54. Considere un conjunto X y $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ la medida exterior en X. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es μ^*-medible, si para cualesquiera que sea $B \subset X$,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

Es decir, $A \subset X$ es un conjunto μ^*-medible si y sólo si para todo

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c), \forall B \subset X.$$

Teorema 2.55 (Carathéodory). [5]Se tienen las siguientes propiedades

1. La familia de conjuntos μ^*-medibles, $\hat{\mathcal{M}}$ es σ-Álgebra y una medida es la restricción de μ^* a $\hat{\mathcal{M}}$.

2. En general, si $(A_j)_{J\in J}$ es familia contable de conjuntos de $\hat{\mathcal{M}}$ disjuntos dos a dos y $B \subset X$,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j\in J} B \cap A_j\Big) = \sum_{j\in J} \mu^*(B \cap A_j),$$

Prueba. Se divide la demostración en ocho partes, cada una con su justificación para mejor comprensión

Parte 1 Sea $A \subset X$, tal que para cada $B \subset X$, entonces

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B);$$

Luego A es μ^*-medible. En efecto:

Teniendo en cuenta que la desigualdad

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A),$$

es consecuencia de que $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ y de que μ^* es medida exterior.

[5]Otras versiones afirman que la restricción de μ a $\mathcal{M}$ es una medida completa.

Parte 2 Se tiene $\emptyset \in \hat{\mathcal{M}}$ y si $A \in \hat{\mathcal{M}}$, también $X \setminus A \in \hat{M}$. En efecto

La primera afirmación dice que $\mathcal{M} \neq \emptyset$ y resulta de tener $B \cap \emptyset = \emptyset$ y $B \setminus \emptyset = B$, donde $\mu^*(\emptyset) = 0$, la segunda resulta de que $B \cap (X \setminus A) = B \setminus A$, y $B \setminus (X \setminus A) = B \cap A$.

Parte 3 Si $A \in \hat{\mathcal{M}}$ y $A' \in \hat{\mathcal{M}}$, entonces $A \cap A' \in \hat{\mathcal{M}}$. En efecto, para cada $B \subset X$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
&\mu^*(B \cap (A \cap A')) + \mu^*(B \setminus (A \cap A')) \\
&= \mu^*(B \cap A \cap A') + \mu^*([B \setminus (A \cap A')] \cap A) + \mu^*([B \setminus (A \cap A')] \setminus A) \\
&= \mu^*((B \cap A) \cap A') + \mu^*((B \cap A) \setminus A')) + \mu^*(B \setminus A) \\
&= \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B)
\end{aligned}$$

Parte 4 Si $(A_j)_{j \in J}$, es una familia finita no vacía de conjuntos μ^*-medibles; entonces $\bigcap\limits_{j \in J} A_j$, es también μ^*-medible. En efecto, se tiene una consecuencia directa de la parte 3 por inducción en el número de elementos de conjunto finito J de índices.

Parte 5 Sea $(A_j)_{J \in J}$ es una familia finita de conjuntos μ^*-medibles; entonces $\bigcup\limits_{j \in J} A_j$ es también μ^*-medible. En efecto, se trata de una consecuencia de las partes 2 y 4, una vez que $\emptyset$ es μ^*-medible y se puede escribir

$$\bigcup_{j \in J} A_j = X \setminus \bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j)$$

Parte 6 Sea $(A_j)_{j \in J}$ la familia finita de conjuntos disjuntos dos a dos y μ^*-medibles; entonces se tiene, para cada $B \subset X$,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j\Big) = \sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j).$$

Ahora, se demuestra por principio de inducción en el número de elementos de conjunto finito J de índices. Si $J = \emptyset$ la igualdad se reduce a $\mu^*(\emptyset) = 0$ y la igualdad es trivial cuando J tiene un único elemento. Suponiendo que la proposición es válida cuando el conjunto de índices tiene n elementos, se observa que si J tiene $n+1$ elementos y $j_0 \in J$ es elegido, luego

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j\in J} B\cap A_j\Big) = \mu^*\Big((\bigcup_{j\in J} B\cap A_j)\cap A_{J_0}\Big) + \mu^*\Big((\bigcup_{j\in J} B\cap A_j)\backslash A_{j_0}\Big)$$
$$= \mu^*(B\cap A_{j_0}) + \mu^*\Big(\bigcup_{j\in J\backslash j_0} B\cap A_j\Big) = \mu^*(B\cap A_{J_0}) + \textstyle\sum_{j\in J\backslash j_0}\mu^*(B\cap A_j) = \sum_{j\in J}\mu^*(B\cap A_j)$$

Parte 7 Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia contable de conjuntos μ^*-medible, disjuntos dos a dos. Se tiene entonces que $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ es μ^*-medible y para cada $B\subset X$,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j\in J} B\cap A_j\Big) = \sum_{j\in J}\mu^*(B\cap A_j)$$

En particular, tomando $B = X$, se tiene la aditividad contable.

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \sum_{j\in J}\mu^*(A_j).$$

En efecto, para cada $I\subset J$ finito se tiene $\bigcup\limits_{j\in I} B\cap A_j \subset \bigcup\limits_{j\in J} B\cap A_j$ donde se tiene en la parte 6

$$\sum_{j\in I}\mu^*(B\cap A_j) = \mu^*\Big(\bigcup_{j\in I} B\cap A_j\Big) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{j\in J} B\cap A_j\Big).$$

Puesto que $\sum_{j\in J}\mu^*(B\cap A_j)$ es el supremo de todas las sumas parciales finitas, se deduce de lo anterior que $\sum_{j\in J}\mu^*(B\cap A_j) \leq \mu^*(\bigcup_{j\in I} B\cap A_j)$, por lo tanto

$$\sum_{j\in J}\mu^*(B\cap A_j) = \mu^*\Big(\bigcup_{j\in I} B\cap A_j\Big)$$

ya que la desigualdad opuesta $\mu^*(\bigcup\limits_{j\in J} B\cap A_j) \leq \sum_{j\in J}\mu^*(B\cap A_j)$ es una consecuencia de ser μ^* medida exterior. Para mostrar que $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ es μ^*-medible, basta teniendo en cuenta la parte 1 que, para cada conjunto $B \subset X$,

$$\mu^*\Big(B \cap (\bigcup_{j\in J} A_j)\Big) + \mu^*\Big(B \setminus (\bigcup_{j\in J} A_j)\Big) \leq \mu^*(B)$$

para lo que basta examinar el caso en que $\mu^*(B) < +\infty$. Ahora, para cada $I \subset J$ finito, de la parte 5, $\bigcup\limits_{j\in I} A_j$ es medible permite escribir, teniendo en cuenta la parte 6 y la inclusión $B \setminus (\bigcup\limits_{j\in J} A_j) \subset B \setminus (\bigcup\limits_{j\in I} A_j)$,

$$\sum_{j\in I} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*\Big(B \setminus (\bigcup_{j\in J} A_j)\Big) \leq \mu^*\Big(B \cap (\bigcup_{j\in I} A_j)\Big) + \mu^*\Big(B \setminus (\bigcup_{j\in I} A_j)\Big) = \mu^*(B),$$

donde

$$\sum_{j\in I} \mu^*(B \cap A_j) \leq \mu^*(B) - \mu^*\Big(B \setminus (\bigcup_{j\in J} A_j)\Big),$$

lo que, teniendo en cuenta la definición de las sumas como supremo de las sumas parciales finitas implica que

$$\sum_{j\in J} \mu^*(B \cap A_j) \leq \mu^*(B) - \mu^*(B \setminus (\bigcup_{j\in J} A_j))$$

recuérdese que μ^* es una medida exterior y observando que $B \cap (\bigcup\limits_{j\in J} A_j)$ es la unión de los $B \cap A_j,\ j \in J$,

$$\mu^*(B \cap (\bigcup_{j\in J} A_j)) + \mu^*(B \setminus (\bigcup_{j\in J} A_j)) \leq \sum_{j\in J} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus (\cup_{j\in J} A_j)) \leq \mu^*(B).$$

Parte 8 La clase $\hat{\mathcal{M}}$ es una σ-Álgebra de partes de X y la restricción de μ^* la σ-Álgebra $\hat{\mathcal{M}}$ es una medida. En efecto se verificó en la parte 2 que $\emptyset \in \hat{\mathcal{M}}$ ya que $X \setminus A \in \hat{\mathcal{M}}$, para cada $A \in \hat{\mathcal{M}}$ en la parte 3; que la intersección dos conjuntos en $\hat{\mathcal{M}}$ sigue estando en $\hat{\mathcal{M}}$, en la parte 5; que la unión de la familia finita de los conjuntos en $\hat{\mathcal{M}}$, está en $\hat{\mathcal{M}}$ y en la parte 7; que la unión de la familia contable de los conjuntos disjuntos dos a dos está en $\hat{\mathcal{M}}$. Para verificar que $\hat{\mathcal{M}}$ es una σ-Álgebra. Falta mostrar que, si $(A_j)_{j\in J}$ es la familia contable de conjuntos en $\hat{\mathcal{M}}$, no necesariamente disjuntos dos a dos, la unión $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ aún está en $\hat{\mathcal{M}}$, eso resulta del Lema 2.31, que garantiza que se tiene $\bigcup\limits_{j\in J} A_j = \bigcup\limits_{j\in J} A'_j$, con A'_j disjuntos dos a dos y por lo que refiere anteriormente $A'_j \in \hat{\mathcal{M}}$. Dado que la restricción a $\hat{\mathcal{M}}$ de la medida exterior μ^* es una medida resulta de que $\mu^*(\emptyset) = 0$ y de la aditividad contable, probada en la parte 7.

Proposición 2.56. Considere X un conjunto, $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de X y $\mu\colon \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida con $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ su respectiva medida exterior asociada, se tiene entonces que cualquier conjunto $A \in \mathcal{S}$ es μ^*-medible; esto es $\mathcal{S} \subset \hat{\mathcal{M}}$, donde $\hat{M}$ es la σ-Álgebra de los conjuntos μ^*-medibles.

Prueba. Sea $A \in \mathcal{S}$ y que $B \in \mathcal{S}$. Se sabe entonces en virtud de la Proposición 2.37 que $B \cap A \in \mathcal{S}$ y por la Defininción 2.38 línea 3 que existe una familia finita $(C_i)_{i\in I}$ de conjuntos $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos tal que $B \setminus A = \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ y puesto que B es la unión de conjuntos de $\mathcal{S}$, $B \cap A$ y $C_i, i \in I$, que son disjuntos dos a dos, se obtiene por aditividad de μ lo siguiente

$$\mu^*(B) = \mu(B) = \mu(B \cap A) + \sum_{i\in I} \mu(C_i) = \mu^*(B \cap A) + \sum_{i\in I} \mu^*(C_i)$$

por ser μ^* una medida exterior y por tanto $\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{i\in I} \mu^*(C_i)$,

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B)$$

Ahora, esta desigualdad continúa siendo válida para un conjunto $B \subset X$ arbitrario, para lo que se puede ya suponer que $\mu^*(B) < +\infty$. Sea entonces $(B_j)_{j\in J}$ una $\mathcal{S}$-cobertura contable arbitraria de B. Por lo que se vió al inicio se tiene, para cada j, $\mu^*(B_j \cap A) + \mu^*(B_j \setminus A) \leq \mu^*(B_j) = \mu(B_j)$ donde, por ser $B \cap A \subset \bigcup_{j \in J}(B_j \cap A)$ y $B \setminus A \subset \cup_{j\in J}(B_j \setminus A)$ y por μ^* ser una medida exterior,

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq (\sum_{j\in J} \mu^*(B_j \cap A)) + (\sum_{j \in J} \mu^*(B_j \setminus A))$$
$$= \sum_{j\in J}(\mu^*(B_j \cap A) + \mu^*(B_j \setminus A)) \leq \sum_{j\in J} \mu(B_j)$$

el cual por la definición de la medida exterior $\mu^*(B)$ como un ínfimo, implica que

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B).$$

Puesto que $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ y por ser μ^* una medida exterior, se tiene también que $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$, se concluye que $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$, i.e. que A es efectivamente μ^*-medible.

Teorema 2.57 (Extensión de Hahn)**.** Sea $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de un conjunto X y $\mu\colon \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida. Siendo $\mathcal{M}$ la σ-Álgebra generada por $\mathcal{S}$, queda establecida la medida $\hat{\mu}\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, cuya restricción a $\mathcal{S}$ es μ, por condición, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\hat{\mu}(A)$ es el ínfimo de las sumas $\sum_{j\in J} \mu(A_j)$, con $(A_j)_{j\in J}$, $\mathcal{S}$*-cobertura contable* de A, si tales coberturas existiesen y caso contrario, $\hat{\mu}(A) = +\infty$.

Prueba. En efecto, por definición de cobertura contable, se puede establecer una medida exterior μ^* en X definida, para cada $A \subset X$, $\mu^*(A)$ por la caracterización de $\hat{\mu}(A)$ referida en el enunciado, se tiene para cada $A \in \mathcal{S}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$. Por el Teorema 2.55 y la Proposición 2.56, la restricción de μ^* a una cierta σ-Álgebra $\hat{\mathcal{M}}$, que contiene $\mathcal{S}$, es una medida y se tiene por definición de σ-Álgebra generada, que $\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$, esto trivialmente implica que la restricción $\hat{\mu}$ de μ^* a la σ-Álgebra $\mathcal{M}$ es una medida cuya restricción a $\mathcal{S}$ es μ.

Escolio 2.58. Se dice que la medida $\hat{\mu}$ es la *extensión de Hahn* de la medida μ.

Proposición 2.59 (Extensión de Hahn)**.** Considere $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de un conjunto X, $\mu\colon \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida y $\hat{\mu}\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ la correspondiente extensión de Hahn a la σ-Álgebra $\mathcal{M}$ generada por $\mathcal{S}$. Para cada $A \in \mathcal{M}$, $\hat{\mu}(A)$ es también el ínfimo de las sumas $\sum_{j\in J} \mu(A_j)$, con $(A_j)_{j\in J}$ $\mathcal{S}$*-cobertura contable* de A constituida por conjuntos disjuntos dos a dos, si esas coberturas existen y caso contrario, es $+\infty$ (esas coberturas existen siempre en el caso en que el semianillo $\mathcal{S}$ es σ-total).

Prueba. Puesto que las $\mathcal{S}$*-coberturas contables* consideradas son algunas de las usadas para la definición de $\hat{\mu}(A)$, bastará á mostrar que, para cada $\mathcal{S}$*-cobertura contable* $(B_k)_{k\in K}$ de A, existe otra $\mathcal{S}$*-cobertura contable* $(A_j)_{j\in J}$ de A, ésta con conjuntos disjuntos dos a dos, tal que $\sum_{j\in J} \mu(A_j) \subset \sum_{k\in K} \mu(B_k)$. Por el Lema 2.30, existen conjuntos disjuntos dos a dos $B'_k \subset B_k$ con $\cup B'_k = \cup B_k$, donde cada B'_k, a pesar de no pertenecer a $\mathcal{S}$ es unión de una familia finita $(A_{k,i})_{i\in I_k}$ de conjuntos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos y se puede considerar la familia contable de conjuntos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos y se puede entonces considerar la familia de conjuntos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos constituida por los $A_{k,i}$ con $k \in K$ e $i \in I_k$ para lo cual se tiene

$$A \subset \bigcup_k B_k = \bigcup_k B'_k = \bigcup_{k,i} A_{k,i}$$

y

$$\sum_{k,i} \mu(A_{k,i}) = \sum_{k,i} \hat{\mu}(A_{k,i}) = \sum_k \hat{\mu}(B'_k) \leq \sum_k \hat{\mu}(B_k) = \sum_k \mu(B_k).$$

como se quería demostrar.

Teorema 2.60 (Extensión de Hahn precisado)**.** Considere $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de un conjunto X y $\mu: \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida σ-Finita. Si $\mathcal{M}$ es la σ-Álgebra generada por $\mathcal{S}$ y la extensión de Hahn $\hat{\mu}: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, que es trivialmente aún una medida σ-Finita, es la única medida de la σ-Álgebra $\mathcal{M}$ cuya restricción a $\mathcal{S}$ es μ. Es frecuente utilizar el mismo símbolo μ para designar la medida σ-finita en el semianillo y el del extensión de Hahn a la σ-Álgebra generada por $\mathcal{S}$.

Prueba. Suponga que $\mu': \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una medida cuya restricción a $\mathcal{S}$ sea μ. Se comienza por verificar que, para cada $A \in \mathcal{M},\ \mu'(A) \leq \hat{\mu}(A)$, para lo que se puede suponer que $\hat{\mu}(A) < +\infty$. Ahora, si $(A_j)_{j\in J}$ es una $\mathcal{S}$-cobertura contable de A arbitraria,

$$\mu'(A) \leq \mu'(\cup_{j\in J} A_j) \leq \sum_{j\in J} \mu'(A_j) = \sum_{j\in J} \mu(A_j),$$

donde, teniendo en cuenta la definición de $\mu^*(A)$ como ínfimo,

$$\mu'(A) \leq \mu^*(A) = \hat{\mu}(A)$$

considere ahora $A \in \mathcal{M}$, para lo cual existe un conjunto $B \in \mathcal{S}$, con $A \subset B$ y $\mu(B) < +\infty$, puesto que se tiene $B = A \bigcup (B \setminus A)$, con $A \bigcap (B \setminus A) = \emptyset$, se obtiene

$$\mu'(A) + \mu'(B \setminus A) = \mu'(B) = \mu(B) = \hat{\mu}(B) = \hat{\mu}(A) + \hat{\mu}(B \setminus A),$$

donde ambos de los miembros son finitos y como ya se vió.

$$\mu'(A) \leq \hat{\mu}(A), \quad \mu'(B \setminus A) \leq \hat{\mu}(B \setminus A)$$

por tanto, se concluye que $\mu'(A) = \hat{\mu}(A)$.

Sea ahora $A \in \mathcal{M}$ arbitrario. El hecho de partir de una medida σ-finita, permite considerar una familia contable $(X_j)_{j\in J}$ de conjuntos de $\mathcal{S}$ con $\mu(X_j) < +\infty$, tal que $X = \bigcup_{j\in J} X_j$ se tiene así que $A = \bigcup_{j\in J} A_j$, con $A_j = A \cap X_j \in \mathcal{M}$ y por tanto, teniendo en cuenta el Lema 2.30, existen conjuntos $B_j \subset A_j \subset X_j$, disjuntos dos a dos, con $B_j \in \mathcal{M}$ tales que $A = \bigcup_{j\in J} B_j$. Puesto que los B_j están en las condiciones anteriores y se verifica que $\mu'(B_j) = \hat{\mu}(B_j)$, se obtiene

$$\mu'(A) = \sum_{j\in J} \mu'(B_j) = \sum_{j\in J} \hat{\mu}(B_j) = \hat{\mu}(A)$$

queda entonces probado que $\mu' = \hat{\mu}$.

Definición 2.61 (Aplicación medible)**.** Sean dos espacios medibles $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$, se dice que $f\colon X \to Y$ es una aplicación medible[6], si para cada $B \in \mathcal{N},\ f^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{M}$.[7]

Proposición 2.62 (Propiedades elementales)**.**

1. Si $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible, entonces la aplicación identidad $I_X\colon X \to X$ es medible.

2. $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ son espacios medibles y $f\colon X \to Y$ es la aplicación de valor constante $y_0 \in Y$, entonces f es medible.

3. Considere $(X, \mathcal{M}),\ (Y, \mathcal{N}),\ (Z, \mathcal{P})$ espacios medibles, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ aplicaciones medibles, implica que $g \circ f\colon X \to Z$ es una aplicación medible.

Prueba. de 1 Para cada $A \subset X,\ I_X^{\leftarrow}(A) = A$.

[6]Las funciones con respecto a la σ-Álgebra $\mathcal{M}$ formada por los conjuntos medibles del espacio X, son las que según autores como [Fava and Zó, 2013] se llaman funciones medibles a secas. Las funciones medibles respecto a la σ-Álgebra de Borel $\mathcal{B}_X$ se llaman *funciones medibles Borel*, o bien *funciones borelianas.*

[7]Note la comparación con funciones continuas: Una aplicación $f\colon X \to Y$ es continua si y sólo si, para cada abierto V de $Y,\ f^{\leftarrow}(V)$ es un abierto de X.

Prueba de 2 Si $B \subset Y$ es medible o no, entonces $f^{\leftarrow}(B) = X$, si $y_0 \in B$ y $f^{\leftarrow}(B) = X$, si $y_0 \notin B$ y tanto X como $\emptyset$ son medibles.

Prueba de 3 Si $C \in \mathcal{P}$, se tiene $g^{\leftarrow}(C) \in \mathcal{N}$, donde por ser tanto g y f medibles

$$(g \circ f)^{\leftarrow}(C) = f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}(C)] \in \mathcal{M}.$$

Definición 2.63 (Subespacios Medibles)**.** Sea $X' \subset X$ un conjunto medible (esto es $X' \in \mathcal{M}$). Teniendo en cuenta la Proposición 2.20, considere la σ-Álgebra de partes de X' restringida $\mathcal{M}_{|X'}$, constituida por los $A \in \mathcal{M}$ tal que $A \subset X'$, entonces a $(X', \mathcal{M}_{|X'})$ se llama *subespacio medible* de $(X, \mathcal{M})$.

Como se vió en la Proposición 2.27, en el caso que X es un espacio topológico y la σ-Álgebra definida X es la de los borelianos en X, entonces la σ-Álgebra del subespacio medible X', es también la σ-Álgebra de los borelianos de X restringida a ese subespacio x'.

Proposición 2.64. Sean $(X, \mathcal{M})$, espacio medible y $X' \subset X$, con $X' \in \mathcal{M}$. Se tiene entonces que la inclusión $i : (X', \mathcal{M}_{|X'}) \to (X, \mathcal{M})$, definida por $i(x) = x$, es una aplicación medible. En consecuencia, si $(Y, \mathcal{N})$ es espacio medible y $f\colon X \to Y$ es aplicación medible, entonces $f_{|X'}\colon X' \to Y$ es también una aplicación medible.

Prueba. La prueba se divide en dos partes

Parte 1 Como $A \in \mathcal{M}$ y la intersección de conjuntos medibles lo es, entonces $i^{\leftarrow}(A) = A \cap X'$ es un conjunto de $\mathcal{M}$, contenido en X' y por tanto un conjunto de $\mathcal{M}_{|X'}$.

Parte 2 Por la Proposición 2.62 se tiene $f_{|X'}\colon X' \to Y$ es la compuesta de $f\colon X \to Y$ con la inclusión $i\colon X' \to X$.

Proposición 2.65. Sean $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles, $Y' \subset Y$, con $Y' \in \mathcal{N}$ y $f\colon X \to Y'$ una aplicación, se tiene entonces que f es medible de $(X, \mathcal{M})$ para $(Y, \mathcal{N})$, si y sólo si es medible de $(X, \mathcal{M})$ para $(Y', \mathcal{N}_{|Y'})$.

Prueba. La condición necesaria resulta inmediatamente del hecho de cada conjunto de $\mathcal{N}_{|\mathcal{Y}'}$ pertenece en particular a $\mathcal{N}$ pues $\mathcal{N}_{|Y'} \subset \mathcal{N}$. La condición suficiente resulta de que $f\colon X \to Y$ es la compuesta de la inclusión $i\colon Y' \to Y$ que es medible por la Proposición 2.64, compuesta con la aplicación $f\colon X \to Y'$ es medible por hipótesis y la composición de aplicaciones medibles lo es.

Proposición 2.66. Dados $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles y $(X_j)_{j \in J}$ una familia contable de conjuntos $X_j \in \mathcal{M}$ tal que $X = \bigcup\limits_{j \in J} X_j$. Si $f\colon X \to Y$, es una aplicación tal que, para cada $j \in J,\ f_{|X_j}\colon X_j \to Y$, sea una aplicación medible de $(X_j, \mathcal{M}_{|X_j})$, para $(Y, \mathcal{N})$, entonces f es medible de $(X, \mathcal{M})$ para $(Y, \mathcal{N})$.

Prueba. Para todo $B \in \mathcal{N}$, implica

$$f^{\leftarrow}(B) = \bigcup_{j \in J} (f_{|X_j})^{\leftarrow}(B),$$

donde cada imagen inversa $(f_{|X_j})^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{M}_{|X}$ es medible en $\mathcal{M}_{|X}$ y la unión de conjuntos medibles lo es, por tanto $f^{\leftarrow}(B)$ es medible en $\mathcal{M}$, lo que implica que f es medible.

Teorema 2.67 (Condición suficiente de medibilidad)**.** Considese $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles y $\mathcal{D}$ una familia de partes de Y tal que la σ-Álgebra de partes de Y generada por $\mathcal{D}$ sea $\mathcal{N}$. Se tiene entonces que una aplicación $f\colon X \to Y$ es medible, si y sólo si para cada $B \in \mathcal{D},\ f^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{M}$.

Prueba. La condición necesaria se sigue del hecho que f es medible si y sólo si, para cada $B \in \mathcal{N},\ f^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{M}$ y por tanto es medible, en particular para cada $B \in \mathcal{D} \subset \mathcal{N}$.

Para la condición suficiente suponga, recíprocamente, que para cada $B \in \mathcal{D},\ f^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{M}$. Teniendo en cuenta las identidades y

$$f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{\leftarrow}(Y \setminus B) = X \setminus f^{\leftarrow}(B), \quad f^{\leftarrow}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j),$$

se observa que la clase de los $B \subset Y$ tales que $f^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{M}$ es una σ-Álgebra de partes Y que por hipótesis contiene a la clase $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{N}$ es la σ-Álgebra intersección que contiene a $\mathcal{D}$, se sigue que la clase referida contiene $\mathcal{N}$, lo que significa precisamente que f es una aplicación medible.

Corolario 2.68. Dados X y Y dos espacios topologícos, y las σ-Álgebras de los borelianos en X e Y respectivamente. Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación continua, entonces f es medible.

Prueba. Puesto que la σ-Álgebra de Borel es aquella generada por la familia de conjuntos abiertos, se tiene por consecuencia del Teorema 2.67, pues como para cada abierto V de Y, por hipótesis f es continua, luego el conjunto $f^{\leftarrow}(V)$ es abierto en X y por tanto un boreliano de X.

Definición 2.69 (Bimedibilidad)**.** Dados $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles. Se dice que una aplicación biyectiva $f\colon X \to Y$ es *bimedible* si es medible y con $f^{-1}\colon Y \to X$ medible.

Del Corolario 2.68 se tiene lo siguiente

Corolario 2.70. Si X e Y son espacios topológicos y se consideran las σ-Álgebras de los borelianos y si $f\colon X \to Y$ es homeomorfismo entre espacios topológicos X y Y, entonces f es aplicación bimedible.

Prueba. Es trivial, pues todo homeomorfismo es biyección bicontinua y por tano bimedible.

Definición 2.71 (Compatible)**.** Sean $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles y $\mu: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $\mu': \mathcal{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dos medidas. Se dice que la aplicación medible $f: X \to Y$ es *compatible* con las medidas si, para cada $B \in \mathcal{N}$,

$$\mu[f^{\leftarrow}(B)] = \mu'(B)$$

En particular, si $X = Y$, $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ y $\mu = \mu'$ y se tiene por tanto una aplicación medible $f: X \to X$, se dice que μ es una medida *f-invariante* si f fuese compatible con las medidas.

Proposición 2.72 (Propiedades elementales de las medidas compatibles)**.**

1. Sea $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible, cualquier medida $\mu: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es *I_X-Invariante*.

2. Dados $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ y $(Z, \mathcal{P})$ tres espacios medibles y asimismo sean tres medidas $\mu: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mu': \mathcal{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $\mu'': \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Si $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ son compatibles con las medidas, entonces $g \circ f: X \to Z$ es compatible con las medidas.

3. Sean $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles y $\mu: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $\mu': \mathcal{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dos medidas. Si $f: X \to Y$ es bimedible y compatible con las medidas, entonces $\exists f^{-1}: Y \to X$ también compatible con las medidas; es decir, para cada $A \in \mathcal{M}$.

$$\mu'[f^{\rightarrow}(A)] = \mu(A).$$

Prueba. de 1 Es trivial, pues se sabe que la aplicación identidad $I_X: X \to X$ es medible y como $\mu[I_X(B)] = \mu(B), \forall B \in \mathcal{M}$, entonces μ es I_X-Invariante.

Prueba de 2 Resulta de considerar que para cada $C \in \mathcal{P}$, arbitrario, entonces

$$\mu[(g \circ f)^{\leftarrow}(C)] = \mu(f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}(C)]) = \mu'[g^{\leftarrow}(C)] = \mu''(C).$$

Prueba de 3 Sea $A \in \mathcal{M}$ arbitrario, primero observe que $f^{\rightarrow}(A) = (f^{-1})^{\leftarrow}(A)$, en particular $f^{\rightarrow}(A) \in \mathcal{N}$ y $f^{\leftarrow}[f^{\rightarrow}(A)] = A$, donde

$$\mu'[(f^{-1})^{\leftarrow}(A)] = \mu'[f^{\rightarrow}(A)] = \mu(f^{\leftarrow}[f^{\rightarrow}(A)]) = \mu(A).$$

Proposición 2.73 (Imagen directa de una medida)**.** Considere $(X, \mathcal{M}),\ (\mathcal{Y}, \mathcal{N})$ dos espacios medibles y $f\colon X \to Y$ aplicación medible. Dado $\mu\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, entonces existe una medida $f_*\mu\colon \mathcal{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida imagen directa de μ por la aplicación f definida por

$$f_*\mu(B) = \mu[f^{\leftarrow}(B)],$$

que es la única medida $\mu'\colon \mathcal{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que f es compatible con las medidas.

Prueba.

1. Se demuestra la primera propiedad de la Definición 2.28 tomando

$$f_*\mu(\emptyset) = \mu[f^{\leftarrow}(\emptyset)] = \mu(\emptyset) = 0.$$

2. Para la segunda propiedad, si $(B_j)_{j\in J}$ es una clase enumerable de conjuntos en $\mathcal{N}$, disjuntos dos a dos, entonces los conjuntos $f^{\leftarrow}(B_j)$ pertenecen a $\mathcal{M}$ y son disjuntos dos a dos por lo que

$$f_*\mu\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \mu[f^{\leftarrow}(\bigcup_{j\in J} B_j)] = \mu\Big(\bigcup_{j\in J}(f^{\leftarrow}(B_j)\Big) = \sum_{j\in J}\mu[f^{\leftarrow}(B_j)] = \sum_{j\in J} f_*\mu(B_j)$$

esto muestra que $f_*\mu$ es una medida en la σ-Álgebra $\mathcal{N}$. Cuando se considera esta medida en $\mathcal{N}$, la aplicación medible f es compatible con las medidas y el hecho de no existir ninguna otra medida en $\mathcal{N}$ con tal propiedad es consecuencia directa de la definición de compatibilidad.

Proposición 2.74 (Invarianza de la medida de Lebesgue por traslación y simetría)**.** Sea $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la σ-Álgebra de los borelianos de $\mathbb{R}$ y $\lambda: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, la medida de Lebesgue. Entonces se establecen las aplicaciones bimedibles $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y para cada $x \in \mathbb{R}$, $\tau_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\sigma(y) = -y, \quad \tau_x(y) = x + y$$

(La *simetría* y *las traslaciones*) y la medida de Lebesgue es σ-Invariante y para cada $x \in \mathbb{R}$, τ_x-Invariante.

Prueba. El hecho que estas aplicaciones sean bimedibles es consecuencia de tratarse de homeomorfismos y el Corolario 2.70, cuyos inversos son respectivamente σ y τ_{-x}. Denote μ y para cada $x \in \mathbb{R}$, μ_x las medidas en la σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ imágenes directas de λ por las aplicaciones medibles $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\tau_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lo que se tiene que probar es que se tiene $\mu = \mu_x = \lambda$. Ahora, eso resulta por definición de medida de Lebesgue y sus propiedades, puesto que siempre que $a \leq b$ en $\mathbb{R}$,

$\mu(]a, b]) = \lambda(-]a, b]) = \lambda([-b, -a[) = -a - (-b) = b - a,$

$\mu_x(]a, b]) = \lambda(-x+]a, b]) = \lambda(]a - x, b - x]) = b - x - (a - x) = b - a$

Proposición 2.75 (Imagen directa de una σ-Álgebra)**.** Dados X e Y dos conjuntos y $f: X \to Y$ una aplicación. Para toda clase $\mathcal{C}$ de partes de X se denota por $f_*\mathcal{C}$ a la clase de partes de Y, constituida por los conjuntos $B \subset Y$ tales que $f^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{C}$. Si $\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra de partes de X entonces se tiene que $f_*\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra de partes de Y, llamada *σ-álgebra imagen directa* de $\mathcal{M}$ por la aplicación f y si considera los espacios medibles $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, f_*\mathcal{M})$ la aplicación $f\colon X \to Y$ es medible.

Prueba. El hecho de ser $f_*\mathcal{M}$ una σ-Álgebra de partes de Y es una consecuencia de las igualdades

1. $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in f_*\mathcal{M}$.

2. Sea $B \in f_*\mathcal{M} \Rightarrow (Y \setminus B) \in \mathcal{M}$ y como $f^{\leftarrow}(Y \setminus B) = X \setminus f^{\leftarrow}(B) \Rightarrow X \setminus f^{\leftarrow}(B) \in f_*\mathcal{M}$.

3. Sea $B_j \in f_*\mathcal{M},\ j \in J$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, como $\bigcup\limits_{j \in J} B_j \in \mathcal{M}$ y

$$f^{\leftarrow}(\textstyle\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j) \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j) \in f_*\mathcal{M}$$

el hecho de ser $f\colon X \to\ Y$ medible es consecuencia de la definición de $f_*\mathcal{M}$.

Proposición 2.76. Sean X e Y dos conjuntos y $f\colon X \to Y$ una aplicación biyectiva. Para cada familia $\mathcal{C}$ de partes de X, la clase $f_*\mathcal{C}$ de partes de Y también puede ser caracterizada siendo la clase de los conjuntos $f^{\rightarrow}(A)$, con $A \in \mathcal{C}$ y en el caso en que $\mathcal{M}$ sea una σ-Álgebra de partes de X, $f_*\mathcal{M}$ y es la única σ-Álgebra $\mathcal{N}$ de partes de Y para la cual la aplicación $f\colon X \to Y$ sea bimedible.

Prueba. Sea $A \in \mathcal{C}$, puesto que $f^{\leftarrow}[f^{\rightarrow}(A)] = A$, implica que $f^{\rightarrow}(A) \in f_*\mathcal{C}$.

Recíprocamente, si $B \in f_*\mathcal{C}$, implica $B = f^{\rightarrow}(A)$, para algún $A = f^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{C}$. Para verificar que, si $\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra de partes de X y se considera en Y la σ-Álgebra $f_*\mathcal{M}$, entonces

f es una aplicación bimedible, por lo que existe

$$f^{-1}\colon (Y, f_*\mathcal{M}) \to (X, \mathcal{M})$$

que también es una aplicación medible y esto resulta de que, si $A \in \mathcal{M}$, se tiene $(f^{-1})^{\leftarrow}(A) = f(A) \in f_*\mathcal{M}$. En cuanto a la unicidad, si $\mathcal{N}$ es una σ-Álgebra de partes de Y tal que $f\colon X \to Y$ es bimedible entonces, para cada $B \in \mathcal{N}$, se tiene que$f^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{M}$ por lo tanto $B \in f_*\mathcal{C}$ y para cada $B \in f_*\mathcal{C}$, se tiene $B = f^{\rightarrow}(A)$, para cierto $A \in \mathcal{M}$, donde

$$B = (f^{-1})^{\leftarrow}(A) \in \mathcal{N}$$

por lo que $\mathcal{N} = f_*\mathcal{M}$.

Corolario 2.77. Sea X un conjunto, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ dos σ-Álgebras de partes de X tales que la aplicación $I_X\colon X \to\ X$ sea bimedible de $(X, \mathcal{M})$ para $(X, \mathcal{M}')$. Se tiene entonces $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

Prueba. Es consecuencia de la afirmación de la unicidad en la Proposicón 2.76, ya que la aplicación I_X también es medible de $(X, \mathcal{M})$ para $(X, \mathcal{M})$. Además $I_{X*}\mathcal{M} = \mathcal{M} = \mathcal{M}'$ es la única σ-Álgebra para la cual I_X sea bimedible.

Proposición 2.78. Sea $\mathcal{C}$ una familia de partes de un conjunto X y $\mathcal{M}$ la σ-Álgebra de partes de X generada por $\mathcal{C}$. Si Y es un conjunto y $f\colon X \to Y$ es una aplicación biyectiva entonces la σ-Álgebra de partes de Y generada por $f_*\mathcal{C}$ es la σ-Álgebra imagen directa $f_*\mathcal{M}$. Además, si $\mathcal{S}$ es un semianillo de partes de X, $f_*\mathcal{S}$ es también un semianillo de partes de Y.

Prueba. Por la caracterización de $f_*\mathcal{C}$ (en particular, de $f_*\mathcal{M}$) en el resultado precedente, es claro que la clase $f_*\mathcal{C}$ de partes de Y está contenida en la σ-Álgebra imagen directa $f_*\mathcal{M}$. Sea ahora $\mathcal{N}$ la σ-Álgebra de subconjuntos de Y que contiene a $f_*\mathcal{C}$. Como f es biyectiva, existe $f^{-1}: Y \to X$ y por la Proposición 2.75 ésta es medible, entonces se puede asignar la σ-Álgebra imagen directa $f_*^{-1}\mathcal{N}$ de partes de X, constituida por los conjuntos $f^{\leftarrow}(B)$, con $B \in \mathcal{N}$, la cual contiene, en particular, para cada $A \in \mathcal{C}$, el conjunto $f^{\leftarrow}[f^{\rightarrow}(A)] = A$; es decir, contiene $\mathcal{C}$. Ya que $\mathcal{M}$ es σ-Álgebra generada por $\mathcal{C}$, se concluye que $\mathcal{M} \subset f_*^{-1}\mathcal{N}$ y para cada $A \in \mathcal{M}$ se tiene así $A = f_*^{\leftarrow}(B)$, para algún $B \in \mathcal{N}$, donde $f(A) = B \in \mathcal{N}$, lo que muestra que $f_*\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, así queda probado que $f_*\mathcal{M}$, es efectivamente la σ-álgebra generada por $f_*\mathcal{C}$.

Suponga ahora que $\mathcal{S}$, es un semianillo de partes de X. De las igualdades $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$ y $f^{\leftarrow}(B \cap B') = f^{\leftarrow}(B) \cap f^{\leftarrow}(B')$ resulta que $\emptyset \in f_*\mathcal{S}$ y que si $B, B' \in f_*\mathcal{S}$ también $B \cap B' \in f_*\mathcal{S}$. Por otro lado, si $B, B' \in f_*\mathcal{S}$, el hecho que $f^{\leftarrow}(B)$ y $f^{\leftarrow}(B')$ pertenecen a $\mathcal{S}$ implica la existencia de una familia finita de subconjuntos $A_i \in \mathcal{S}$ disjuntos dos a dos, tal que

$$f^{\leftarrow}(B \setminus B') = f^{\leftarrow}(B) \setminus f^{\leftarrow}(B') = \bigcup_{i \in I} A_i$$

y resulta que por ser f biyectiva, que

$$B \setminus B' = f^{\rightarrow}[f^{\leftarrow}(B \setminus B')] = f^{\rightarrow}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$$

con los conjuntos $f^{\rightarrow}(A_i)$ pertenecientes a $f_*\mathcal{S}$ y disjuntos dos a dos, lo que muestra que $f_*\mathcal{S}$ es efectivamente un semianillo de partes de Y.

Notación 2. Se va hacer uso de la notación $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ definiendo la clase de partes de los productos cartesianos $A \times B$, con $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{D}$, ya que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ denota también el producto cartesiano de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ como conjunto de pares ordenados (A, B), con $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{D}$.

Proposición 2.79. Dados X e Y dos conjuntos, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos clases de partes de X y Y, respectivamente y $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ la clase de partes lo prodductos cartesianos de la forma $A \times B$, con $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{D}$. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son semianillos de partes de X e Y, respectivamente, enotnces $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es un semianillo de partes de $X \times Y$.

Prueba.

1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ semianillos de partes de X e Y, implica $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\emptyset \in \mathcal{D}$, luego $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

2. Sean $A, A' \in \mathcal{C}$ y $B, B' \in \mathcal{D}$, entonces se tienen $A \cap A' \in \mathcal{C}$ y $B \cap B' \in \mathcal{D}$, esto implica que

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$$

3. Sean $A, A' \in \mathcal{C},\ B, B' \in \mathcal{D}$ y considerese $(A_i)_{i \in I}$ y $(B_j)_{j \in J}$, las familias finitas de conjuntos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente, disjuntos dos a dos, tales que

$$A \setminus A' = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{y} \quad B \setminus B' = \bigcup_{j \in J} B_j,$$

se tiene

$$(A \times B) \setminus (A' \times B') = [(A \setminus A') \times B] \cup [(A \cap A') \times (B \setminus B')] = \Big(\bigcup_{i \in I} (A_i \times B)\Big) \cup \Big(\bigcup_{j \in J} (A \cap A') \times B_j\Big),$$

con los conjuntos $(A_i \times B) \in \mathcal{C}$ y $[(A \cap A') \times B_j] \in \mathcal{D}$ disjuntos dos a dos, lo que muestra que $[(A \times B) \setminus (A' \times B')] \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$; por consiguiente $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es también un semianillo.

Definición 2.80. Considere $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles. Se define la σ-Álgebra *producto* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, siendo la σ-Álgebra de partes de $X \times Y$ generada por la clase $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ de partes de $X \times Y$, la cual es la que se considera implícitamente en $X \times Y$. Se dice que $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ es el *espacio medible producto* de los espacios medibles $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$.

Proposición 2.81. Considerese $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles y el espacio medible producto $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, se tiene

1. *Las proyecciones canónicas* $\pi_1 \colon X \times Y \to X$ y $\pi_2 \colon X \times Y \to Y$ definidas por

$$\pi_1(x, y) = x, \quad \pi_2(x, y) = y.$$

   son aplicaciones medibles.

2. Sean $(Z, \mathcal{P})$ un espacio medible, $f \colon Z \to X \times Y$ una aplicación y $f_1 \colon Z \to X$ y $f_2 \colon Z \to Y$ las respectivas componentes, definidas por

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z))$$

   se tiene entonces que f es medible si y sólo si f_1 y f_2 son ambas medibles.

Prueba.

1. Se tiene como una consecuencia de que para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\pi_1^{\leftarrow}(A) = A \times Y \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N},$$

y para cada $B \in \mathcal{N}$,

$$\pi_2^{\leftarrow}(B) = X \times B \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}.$$

2. Para la condición necesaria, si f es medible, ya que $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ y por el Corolario 2.62, implica que f_1 y f_2 son medibles

Para la condición suficiente, suponga recíprocamente, que f_1 y f_2 son aplicaciones medibles. Para cada $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$ se tiene entonces $f_1^{\leftarrow}(A) \in \mathcal{P}$ y $f_2^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{P}$ y por tanto también

$$f^{\leftarrow}(A \times B) = f_1^{\leftarrow}(A) \cap f_2^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{P}.$$

se concluye que f es medible.

Proposición 2.82 (Compatibilidad con las restricciones de σ-Álgebra)**.** Considere $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles y el espacio medible producto $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, $X' \in \mathcal{M}$ e $Y' \in \mathcal{N}$ y las σ-Álgebras restringidas $\mathcal{M}_{|X'}$ y $\mathcal{N}_{|Y'}$ de partes de X' y Y', respectivamente (Cf. la Proposición 2.20), se tiene entonces que la σ-Álgebra producto $\mathcal{M}_{|X'} \otimes \mathcal{N}_{|Y'}$, de partes de $X' \times Y'$ es igual a la σ-Álgebra restricción $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})_{|X' \times Y'}$.

Prueba. Sea $\mathcal{P} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_{|X' \times Y'}$ se utiliza el Corolario 2.77 para mostrar las σ-Álgebras $\mathcal{P}$ y $\mathcal{M}_{|X'} \otimes \mathcal{N}_{|Y'}$ coinciden por unicidad, si $I\colon (X' \times Y', \mathcal{M}_{|X'} \otimes \mathcal{N}_{|Y'}) \to (X' \times Y', [\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}]_{|X' \times Y'})$ la aplicación identidad es bimedible. Se divide la prueba en dos partes:

Parte 1 Como las proyecciones canónicas $X' \times Y' \to X'$ y $X' \times Y' \to Y'$ son medibles, cuando se considera como σ-Álgebra en el dominio $\mathcal{M}_{|X'} \otimes \mathcal{N}_{|Y'}$ y en los espacios de llegada $\mathcal{M}_{|X'}$ y $\mathcal{N}_{|Y'}$, (Cf. la línea 1) de la Proposición 2.81, se observa que en ellas son también medibles como aplicaciones $X' \times Y' \to X$ y $X' \times Y' \to Y$, pues ellas son compocición de las funciones medibles proyección e inclusión. Cuando se considera $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, como σ-Álgebras en los espacios de llegada (Cf. la Proposición 2.65), inclusión $X' \times Y' \to X \times Y$, es medible, cuando se considera en el espacio de llegada la σ-Álgebra

$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, (Cf. la línea 2 de la Proposición 2.81) y por tanto, por la Proposición 2.65, la identidad de $X' \times Y'$, es medible de $\mathcal{M}_{|X'} \otimes \mathcal{N}_{|Y'}$, para $\mathcal{P}$.

Parte 2 Teniendo en cuenta la Proposición 2.64 se observa el hecho de las proyecciones canónicas $X \times Y \rightarrow X$ y $X \times Y \rightarrow Y$ serán medibles, cuando se considera como σ-Álgebras de el dominio $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ y en los espacios de llegada $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$,podemos deducir las restricciones $X' \times Y' \rightarrow X$ y $X' \times Y' \rightarrow Y$, son también medibles, cuando se considera en el dominio de la σ-Álgebra P,y por tanto las proyecciones canónicas $X' \times Y' \rightarrow X'$ y $X' \times Y' \rightarrow Y'$, son medibles, cuando se considera en los espacios de llegada de las σ-Álgebras $\mathcal{M}_{|X'}$ y $\mathcal{N}_{|Y'}$, lo que implica que la identidad de $X' \times Y'$, es medible de $\mathcal{P}$, para $\mathcal{M}_{|X'} \otimes \mathcal{N}_{|Y'}$

Proposición 2.83. Considerese X e Y dos conjuntos, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ las clases de partes de X e Y, suponga que existen familias contables $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos en $\mathcal{C}$ e $(Y_j)_{j \in J}$ de conjuntos en $\mathcal{D}$, tales que $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ e $Y = \bigcup\limits_{j \in J} Y_j$. Como $\mathcal{M}$ es la σ-Álgebra generada por $\mathcal{C}$ y $\mathcal{N}$ la σ-Álgebra generada por $\mathcal{D}$, se tiene entonces que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ es la σ-Álgebra de partes de $X \times Y$ generada por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Prueba. Se hace la demostración paso a paso, primero que $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ y luego para $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$. En efecto, para cada $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{D}$, se tiene $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$ respectivamente, donde

$$A \times B \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N},$$

se concluye que $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Falta por demostrar que, si $\mathcal{P}$ es una σ-Álgebra arbitraria de partes de $X \times Y$, tal que $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \mathcal{P}$; entonces, se tiene necesariamente $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$. En efecto, la prueba se divide en tres partes

Parte 1 Se muestra que $\mathcal{C} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$. Fije $A \in \mathcal{C}$ y denote por $\mathcal{N}_A$ la familia de conjuntos $B \subset Y$, tales que $A \times B \in \mathcal{P}$. En efecto, se tiene $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{P}$, luego se muestra que $\emptyset \in \mathcal{N}_A$. Si $B \in \mathcal{N}_A$, se tiene para cada $j \in J,\ A \times Y_j \in \mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, y por lo tanto

$$A \times Y = \bigcup_{j \in J} A \times Y_j \in \mathcal{P},$$

entonces

$$A \times (Y \setminus B) = (A \times Y) \setminus (A \times B) \in \mathcal{P},$$

y sea $Y \setminus B \in \mathcal{N}_A$, siendo ahora $(B_k)_{k \in K}$ una familia contable de conjuntos en $\mathcal{N}_A$. En efecto se tiene para cada $k,\ A \times B_k \in \mathcal{P}$ implica que

$$A \times (\bigcup_{k \in K} B_k) = \bigcup_{k \in K} (A \times B_k) \in \mathcal{P}$$

es decir, $\bigcup\limits_{k \in K} B_k \in \mathcal{N}_A$ así se verifica que $\mathcal{N}_A$ es una σ-Álgebra de partes de Y que, por hipótesis, contiene a la clase $\mathcal{D}$, lo que implica que $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_A$, por ser $\mathcal{N}$ la más pequeña se concluye así que, para cada $B \in \mathcal{N}$ se tiene $A \times B \in \mathcal{P}$. Por lo que, $\mathcal{C} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$.

Parte 2 Para mostrar que $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$, fije $B \in \mathcal{N}$. Denote $\mathcal{M}_B$ la clase de los conjuntos $A \subset X$, tales que $A \times B \in \mathcal{P}$. En efecto, se tiene $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{P}$ se muestra que $\emptyset \in \mathcal{M}_B$. Si $A \in \mathcal{M}_B$ en efecto se tiene, para cada $i \in I$ que $X_i \times B \in \mathcal{C} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$, por lo tanto

$$X \times B = \bigcup_{i \in I} X_i \times B \in \mathcal{P},$$

entonces

$$(X \setminus A) \times B = (X \times B) \setminus (A \times B) \in \mathcal{P},$$

y sea $X \setminus A \in \mathcal{M}_B$, siendo ahora $(A_k)_{k\in K}$ una familia contable de conjuntos en $\mathcal{M}_B$. En efecto, se tiene para cada $k,\ A_k \times B \in \mathcal{P}$, implica que

$$(\bigcup_{k\in K} A_k) \times B = \bigcup_{k\in K} (A_k \times B) \in \mathcal{P}$$

esto es $\bigcup\limits_{k\in K} A_k \in \mathcal{M}_B$, así se verifica que $\mathcal{M}_B$ es una σ-Álgebra de partes de X que por la parte 1, contiene a la clase $\mathcal{C}$, lo que implica que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$ y se concluye así que, para cada $A \in \mathcal{M}$, se tiene que $A \times B \in \mathcal{P}$. Es decir, $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$.

Parte 3 Se tiene que $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$ y $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ es la σ-Álgebra generada por $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ lo cual implica que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$, que es lo que se quería probar.

Proposición 2.84 (Importancia de las bases contables)**.** Considere X un espacio topológico dotado de una base contable de conjuntos abiertos $\mathcal{U}$, se tiene entonces que la σ-Álgebra generada por $\mathcal{U}$ es la σ-Álgebra de los borelianos $\mathcal{B}_X$.

Prueba. Ya que $\mathcal{B}_X$ contiene todos los abiertos de X, contiene también, en particular, todos los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{U}$. Suponiendo ahora que $\mathcal{M}$ es una σ-Álgebra de partes de X que contiene $\mathcal{U}$. Puesto que cualquier abierto de X es unión de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{U}$, por tanto una unión de una familia tiene que ser contable por la línea 3 de σ-Álgebra de conjuntos de $\mathcal{M}$, se sigue que todos los abiertos de X pertenecen a $\mathcal{M}$ y por tanto, $\mathcal{B}_X$ es la σ-Álgebra generada por esta clase de abiertos en $\mathcal{M}$, luego $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{M}$. Queda entonces probado que $\mathcal{B}_X$ es efectivamente la σ-Álgebra generada por $\mathcal{U}$.

Proposición 2.85 (Borelianos de un producto)**.** Sean X y Y dos espacios topológicos de base contable $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ las respectivas σ-Álgebra de los borelianos. Se tiene entonces que la

σ-Álgebra producto $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ es la σ-Álgebra de $\mathcal{B}_{X\times Y}$ de los borelianos de $X \times Y$.

Prueba. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ bases contables de X y Y respectivamente, recordando que el producto de bases contables $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ es una base contable de abiertos de $X \times Y$, teniendo en cuenta lo anterior las σ-Álgebras generadas por $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ y $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ son respectivamente $\mathcal{B}_X$,$\mathcal{B}_Y$ y $\mathcal{B}_{X\times Y}$, además que X e Y, siendo abiertos en si mismos, son uniones contables de conjuntos en $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$, respectivamente, la σ-Álgebra generada por $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ es la σ-Álgebra $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$. Concluyendo así que $\mathcal{B}_{X\times Y} = \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$.

Proposición 2.86. Considerando en $\mathbb{R}$ la σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de los borelianos y en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la σ-Álgebra producto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, son medibles las aplicaciones $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(x, y) = x + y, \quad \psi(x, y) = x \cdot y$$

Prueba. Basta observar que estas aplicaciones son uniformemente continuas y portanto estas aplicaciones son continuas, luego ellas son medibles, cuando se considera en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que por la Proposición 2.85, la σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ coincide con σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Proposición 2.87. Considerando en $\overline{\mathbb{R}}_+$ la σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ de los borelianos y en $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ la σ-Álgebra producto $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, las aplicaciones $\overline{\varphi}, \overline{\psi} \colon \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$\overline{\varphi}(x, y) = x + y, \quad \overline{\psi}(x, y) = x \cdot y$$

son medibles.

Prueba. En efecto $\mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{R}}_+$, inducen la misma topología restringida a $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ (recuerde la topología inducida por la recta extendida $\overline{\mathbb{R}}$) luego se concluye que las σ-Álgebras $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$

tienen la misma restricción a $\mathbb{R}_+$, teniendo en cuenta la Proposición 2.82, se concluye que las σ-Álgebras $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ tienen también la misma restricción $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ denotada por $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ por lo que se concluye del resultado precedente que $\overline{\varphi}$ y $\overline{\Psi}$ tienen restricciones medibles al subconjunto medible $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ de su dominio. Se tienen dos casos:

Caso 1 Para la aplicación $\overline{\varphi}$. El dominio $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ es unión de tres subconjuntos medibles

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \{+\infty\} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ \times \{+\infty\}$$

y la restricción de $\bar{\varphi}$ si uno de los tres subconjuntos es medible el primer caso fue referido y en los otros dos casos por términos del valor constante ∞ y aplicando la Proposición 2.66 $\overline{\varphi}$ es medible.

Caso 2 Para la aplicación $\bar{\psi}$. El dominio $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ es unión de cinco subconjuntos medibles. El dominio $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ es unión de cinco subconjuntos:

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \{0\} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ \times \ \{0\}, \quad \{+\infty\} \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{0\}), \quad (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{0\}) \times \{+\infty\}$$

y la restricción de $\overline{\varphi}$ a cada uno de ellos es medible, en el primer caso como referimos al inicio, en el segundo y en el tercer caso por términos de aplicación de valor constante 0 y en el cuarto caso y quinto caso por términos aplicativos de valor contante $+\infty$ aplicando como en el caso 1, la Proposición 2.66, se concluye que $\overline{\varphi}$ es medible.

2.5 La Integral

En este apartado se define la integral para funciones medibles, cuyo dominio es espacio medible $(X, \mathcal{M})$, dotado de una medida $\mu: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, y que toman valores en $\overline{\mathbb{R}}_+$. Para ello, se complementa el estudio de las funciones medibles que se hizo en la Definición 2.61 con propiedades especiales que son válidas cuando el espacio de llegada es $\overline{\mathbb{R}}_+$, donde implícitamente se considera las σ-Álgebras de los borelianos $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$. En el caso del primer resultado, presentamos simultáneamente una versión para funciones medibles con valores en $\mathbb{R}$, también implícitamente con la σ-Álgebra boreliana, de hecho con una demostración análoga, porque se necesita usarla más adelante.

Teorema 2.88. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, se tiene entonces que

1. Si $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ son funciones medibles, entonces son también funciones medibles $f + g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $f \cdot g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, definidas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

2. Sean $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ funciones medibles, implica que son también funciones medibles $f + g \colon X \to \mathbb{R}$ y $f \cdot g \colon X \to \mathbb{R}$, definidas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

En consecuencia, la función $f - g \colon X \to \mathbb{R}$ también es medible, definida por

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x).$$ [8]

Prueba.

1. Teniendo en cuenta la Proposición 2.81, parte 2) podemos considerar una aplicación medible $X \to \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $x \mapsto (f(x), g(x))$, donde en $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ se considera el σ-Álgebra producto $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$. Basta notar que $f + g$ y $f \cdot g$ son las compuestas de esta

[8] Nótese que, en el caso del inciso 1), no tenía sentido considerar la función $f - g$, ya que no es posible definir la diferencia de elementos arbitrarios de $\overline{\mathbb{R}}$.

aplicación medible con las aplicaciones medibles $\overline{\varphi}\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $\overline{\psi}\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (suma y multiplicación) mencionadas en la Proposición 2.87 y por tanto son medibles.

2. Teniendo en cuenta la Proposición 2.81, se considera una aplicación medible $X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto (f(x), g(x))$ donde se considera en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la σ-Álgebra producto $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$. Basta notar entonces que $f+g$ y $f \cdot g$ son las compuestas de esta aplicación medible con las aplicaciones medibles (adición y multiplicación) mencionado en la Proposición 2.86. En cuanto a la función $f - g$, tenemos una consecuencia de lo ya comprobado, ya que se tiene la combinación lineal $f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x)$, donde la función constante -1 también es medible.

Lema 2.89. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una aplicación. Son entonces equivalentes las siguientes afirmaciones

1) La aplicación f es medible.

2) Es medible el conjunto

$$A_a = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}, \forall a \in \mathbb{R}_+$$

3) Es medible el conjunto

$$B_a = \{x \in X \mid f(x) > a\}, \forall a \in \mathbb{R}_+$$

Prueba. $1 \Rightarrow 2$ Resulta de tener $A_a = f^{\leftarrow}([a, +\infty])$, que es medible pues f lo es y dado que $[a, +\infty]$ es cerrado y por lo tanto es un boreliano en la σ-Álgebra $\mathbb{R}$, entonces la imagen inversa $f^{\leftarrow}([a, +\infty])$ es medible.

$2 \Rightarrow 3$ Suponga que se verifica 2). Observando que $f(x) > a$ si y sólo si, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \geq a + 1/n$, se observa que para cada $a \in \mathbb{R}_+$, si los conjuntos A_a son medibles, entonces los $A_{a+1/n}$ también lo son, poniendo

$$B_a = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{a+\frac{1}{n}},$$

se concluye que B_a es medible, lo que demuestra 3).

$3 \Rightarrow 1$ Suponga finalmente que 3) se verifica y se muestra que f es medible. Comience por notar que si $a < 0$ en $\mathbb{R}$, el conjunto B_a, definido del mismo modo para $a \geq 0$, es igual a X, en particular medible. Puesto que $f(x) = +\infty$ si y sólo si, $f(x) > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, observe que siendo $X_\infty = \{x \in X \mid f(x) = +\infty\}$, se tiene la intersección de conjuntos medibles

$$X_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

y por lo tanto X_∞ es medible. El dominio X es pues la unión de los conjuntos medibles X_∞ y $X \setminus X_\infty$ y la restricción de f a X_∞ es medible, por ser constante. Teniendo en cuenta la Proposición 2.66 para mostrar que $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es medible, basta así mostrar que $f_{|X \setminus X_\infty}\colon X \setminus X_\infty \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es medible, lo que es equivalente a $f_{|X \setminus X_\infty}\colon X \setminus X_\infty \to \mathbb{R}$ sea medible, cuando se considera en $\mathbb{R}$ el σ-Álgebra $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ de los borelianos, ya que las restricciones de las σ-álgebras $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ y $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}_+$ coinciden, ya que $\overline{\mathbb{R}}_+$ y $\mathbb{R}$ inducen una misma topología en $\mathbb{R}_+$ según la Proposición 2.27. Puesto que el σ-álgebra de los borelianos de $\mathbb{R}$ es generada por la clase de los intervalos semiabiertos $]a, b]$, con $a \leq b$, recuerde la Proposición 2.48, para verificar que $f_{|X \setminus X_\infty}\colon X \setminus X_\infty \to \mathbb{R}$ es medible, basta comprobar que, siempre que $a \leq b$ en $\mathbb{R}$, $f^{\leftarrow}(]a, b])$ es medible por el Teorema 2.67 y resultará que

$$f^{\leftarrow}(]a,b]) = \{x \in X \mid f(x) > a \wedge f(x) \leq b\} = B_a \setminus B_b.$$

Teorema 2.90. Sean $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dos aplicaciones medibles. Entonces son medibles los conjuntos

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}, \quad B = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\},^{9} \quad C = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}.$$

Prueba. Denótese por $\mathbb{Q}_+$ el conjunto numerable de los números racionales en $\mathbb{R}_+$. Para cada $a \in \mathbb{Q}_+$ el Lema 2.89 garantiza que son medibles los conjuntos

$$B_a = \{x \in X \mid f(x) > a\} \quad \text{y} \quad B'_a = \{x \in X \mid g(x) > a\}$$

y como se tiene que $f(x) < g(x)$ si y sólo si, existe $a \in \mathbb{Q}_+$ con $f(x) \leq a < g(x)$, se puede escribir

$$B = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}_+} (B'_a \setminus B_a),$$

Note que $B_a \setminus B'_a$ es medible y la unión de conjuntos medibles lo es, lo que muestra que B es medible. Intercambiando los roles de f y g, se observa que el conjunto también es medible $B' = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$ el hecho de que A sea medible resulta de tener $A = X \setminus (B \cup B')$ y el hecho de que C sea medible resulta de tener $C = A \cup B$.

Teorema 2.91 (Supremos e ínfimos)**.** Sea un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ y $(f_j)_{j \in J}$ una familia contable, no vacía, de aplicaciones medibles $f_j\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Son entonces medibles las funciones

[9] Se podría estar tentado a transformar la condición $f(x) = g(x)$ en $f(x) - g(x) = 0$; pero esto no es posible, ya que no hay sustracción en el contexto de $\overline{\mathbb{R}}_+$

$f, F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$f(x) = \inf_{j \in J} f_j(x), \quad F(x) = \sup_{j \in J} f_j(x).$$ [10]

Prueba. Basta probar que para cada $a \in \mathbb{R}_+$, el conjunto $\{x \in X \mid [a, +\infty]\}$ es medible. En efecto, se tiene que $f(x) \geq a$ si y sólo si, para todo $j \in J,\ f_j(x) \geq a$ y por lo tanto

$$\{x \in X \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_{j \in J} \{x \in X \mid f_j(x) \geq a\}$$

donde los conjuntos en el segundo miembro son medibles, teniendo en cuenta el Lema 2.89 parte 2), se concluye que el conjunto de los primeros miembros también es medible lo que, por el mismo lema 2.89 , implica que f es medible.

Similarmente, se afirma que el conjunto $\{x \in X \mid F(x) > a\}$ es medible. En efecto, para cada $a \in \mathbb{R}_+$, se tiene $F(x) > a$ si y sólo si, existe $j \in J$ tal que $f_j(x) > a$, y por lo tanto

$$\{x \in X \mid F(x) > a\} = \bigcup_{j \in J} \{x \in X \mid f_j(x) > a\}$$

donde los conjuntos en el segundo miembro son medibles, teniendo en cuenta el lema anterior parte 3). Se concluye que conjunto del primer miembros también es medible lo que, por el mismo lema, implica que f es medible.

Teorema 2.92 (Límites de funciones medibles)**.** Sean $(X, \mathcal{M})$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones medibles $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que, para cada $x \in X,\ f_n(x) \to f(x)$ en $\overline{\mathbb{R}}_+$. Se tiene entonces que la aplicación $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ así definida, también es medible.

[10] Una restricción $J \neq \emptyset$ es innecesario para el que acepte pensar en ínfimo y supremo de una familia vacía, en el contexto de $\overline{\mathbb{R}}_+$, siendo respectivamente $+\infty$ y 0. Por supuesto, en este caso la conclusión es trivial, ya que f y F son aplicaciones constantes.

Más precisamente, siendo para cada $n \in \mathbb{N},\ g_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una aplicación definida por

$$g_n(x) = \inf_{m \geq n} f_m(x), \text{ se tiene } f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x).$$

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$ una aplicación $g_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es medible teniendo en cuenta 2.91. Se va a verificar que se tiene que $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ lo que, de nuevo por el mismo resultado, implicará que $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y medible[11]

Se divide esta verificación en dos partes

Parte 1 Primero comprobando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n \leq f(x)$, esto es, que $f(x)$ es una cota superior del conjunto de $g_n(x)$.

Si eso no sucediera, existe n_0 tal que $f(x) < g_{n_0}(x)$ y por lo tanto existiía n_1 tal que, para todo el $m \geq n_1$, $f_m(x) < g_{n_0}(x)$ y eso era absurdo, ya que, siendo $m = \max\{n_0, n_1\}$ es uno de los elementos del conjunto cuyo ínfimo es $g_{n_0}(x)$.

Parte 2 Se verifica que $f(x)$ es la menor cota superior del conjunto de los $g_n(x)$, es decir, que si $a < f(x),\ a$ no es una cota superior, esto es, existe $n_0 \in N$ tal que $a < g_{n_0}(x)$.

Ahora, eligiendo $\delta > 0$ tal que $a + \delta < f(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m \geq n_0$, $a + \delta < f_m(x)$, lo que implica, por $g_{n_0}(x)$ ser el ínfimo de los $f_m(x)$, que $a < a + \delta \leq g_{n_0}(x)$.

Definición 2.93. Considere $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Se dice que la aplicación $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ es *función simple*, si ella es medible y el conjunto $f(X)$ es finito.

[11] En general, independientemente de que la sucesión de $f_n(x)$ converja, se puede definir $g_n(x)$ como antes y poner $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ y entonces a $f(x)$ se llama *límite inferior* de la sucesión de $f_n(x)$ denotado por $\liminf f_n(x)$. Lo que se va a mostrar, es que cuando el límite existe, éste coincide con el límite inferior.

Escolio 2.94. Tenga en cuenta que, por definición, una función simple nunca toma el valor $+\infty$.

Teorema 2.95. Sea un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ y $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ una función simple. Existe entonces una familia finita $(X_j)_{j\in J}$ de partes medibles de X, disjuntas dos a dos y de unión X, tal que la restricción de f a cada X_j sea constante. A tal familia le damos el nombre de partición adaptada a la función simple

Prueba. Considérese J como el conjunto finito conformado por $f^{\rightarrow}(X)$ y para cada $j \in J$ considere el conjunto

$$X_j = \{x \in X \mid f(x) = j\}$$

La imagen inversa por medio de la aplicación f del conjunto cerrado $\{j\}$ que es en particular boreliano.

Escolio 2.96. Nótese que, aunque se ha construido, de forma bien determinada, una partición adaptada a una función simple dada, existen en general, otras posibles particiones adaptadas, por ejemplo uniendo conjuntos vacíos a la partición o reemplazando uno de los conjuntos por una partición finita de ese conjunto por conjuntos medibles. Como se verá acontinuación, esta indeterminación de las particiones asociadas que se pueden considerar es fundamental para trabajar cómodamente con funciones simples. Véase ahora cómo se puede definir la integral de una función simple, cuando se le dota una medida en el σ-Álgebra del dominio.

Definición 2.97. Se llama *Espacio de Medida* a una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$, donde X es un conjunto, $\mathcal{M}$ una σ-Álgebra de partes de X y $\mu\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida. En particular, $(X, \mathcal{M})$ es entonces un espacio medible.

Teorema 2.98. Considere un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $f \colon X \to \mathbb{R}_+$ función simple. Sean $(X_j)_{j \in J}$ y $(X'_k)_{k \in K}$ dos particiones adaptadas a la función f y sean $(a_j)_{j \in J}$ y $(b_k)_{k \in K}$ familia de elementos de $\mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = a_j$, para cada $x \in X_j$, y que $f(x) = b_k$, para cada $x \in X'_k$.[12] Entonces

$$\sum_{j \in J} a_j \mu(X_j) = \sum_{k \in K} b_k \mu(X'_k).$$

Prueba. Para todo $j \in J$, X_j es la unión de la familia finita de conjuntos medibles $X_j \cap X'_k$, $k \in K$, que son disjuntos dos a dos, por lo que, teniendo en cuenta la distributividad y la propiedad de Fubini en la Proposición 2.13, se obtiene

$$\sum_{j \in J} a_j \mu(X_j) = \sum_{j \in J} a_j \Big(\sum_{k \in K} \mu(X_j \cap X'_k) \Big) = \sum_{(j,k) \in J \times K} a_j \mu(X_j \cap X'_k).$$

Al intercambiar los roles de las dos particiones, también tenemos

$$\sum_{k \in K} b_k \mu(X'_k) = \sum_{k \in K} b_k \Big(\sum_{j \in J} \mu(X'_k \cap X_j) \Big) = \sum_{(j,k) \in J \times K} b_k \mu(X_j \cap X'_k)$$

Para concluir la igualdad del enunciado, basta comprobar que, para cada par $(j, k) \in J \times K$

$$a_j \mu\,(X_j \cap X'_k) = b_k \mu(X_j \cap X'_k)$$

y esto es consecuencia de que ambos miembros de esta igualdad sean 0, en el caso de que $X_j \cap X'_k = \emptyset$, implica que $\mu(X_j \cap X_k) = 0$ y caso contrario, tiene que ser $a_j = b_k = f(x)$ para un $x \in X_j \cap X'_k$, haciendo que

$$\sum_{j \in J} a_j \mu(X_j) = \sum_{k \in K} b_k \mu(X'_k).$$

[12] Note que los a_j están bien determinados para los índices j tales que $X_j \neq \emptyset$, pero que si $X_j = \emptyset$, cualquier $a_j \in \mathbb{R}_+$ verifica la condición referida. Una observación similar es evidentemente válida para el b_k.

Teniendo en cuenta el teorema anterior,

Definición 2.99. Dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ una función simple, se define la *integral* de f como elemento de $\overline{\mathbb{R}}_+$ como

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} a_j \mu(X_j),$$

donde $(X_j)_{j \in J}$ es una partición adaptada a la función f y $f(x) = a_j$, para cada $x \in X_j$.

Escolio 2.100. Note que, a pesar que $f(x)$ nunca será $+\infty$ la integral puede ser $+\infty$, puesto que para algún j, puede ser $\mu(X_j) = +\infty$ y $a_j > 0$. En el caso de que $\mu(X) < +\infty$, es evidentemente, para cada función simple $f\colon X \to \mathbb{R}_+$, $\int f d\mu < +\infty$.

Ejemplo 2.101. La función idénticamente nula $0\colon X \to \mathbb{R}_+$ es simple, que admite a $\{X\}$ como familia formada por el único conjunto X como partición adaptada. Luego, se tiene que

$$\int_X 0 d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0, \forall X \in \mathcal{M}.$$

Otra consecuencia directa de la definición es que, si $\mu(X) = 0$ (o lo que es equivalente, si $\mu = 0$), entonces, para cada función simple $f\colon X \to \mathbb{R}_+$, se tiene $\int f(x) d\mu(x) = 0$, visto que, siendo $(X_j)_{j \in J}$ una partición adaptada a f, se tiene $\mu(X_j) = 0$, para todo j.

Definición 2.102. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea $(X_j)_{j \in J}$ una partición finita de conjuntos medibles del conjunto X y si $(a_j)_{j \in J}$ es una familia de elementos de $\mathbb{R}_+$, entonces se puede definir una función simple $f\colon X \to \mathbb{R}_+$, teniendo una familia (X_j) como partición adaptada, imponiendo la condición de tener $f(x) = a_j$, para cada $x \in X_j$.

El hecho de que f sea medible resulta de la Proposición 2.66, ya que la restricción en cada X_j es constante.

En particular, si $A \in \mathcal{M}$ y la familia formada por los únicos conjuntos A y $X \setminus A$,

Definición 2.103. La función simple $\mathbb{I}_A\colon X \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

se denomina *función indicatriz* o *función característica* del conjunto A, y para el cual se tiene, dada una medida $\mu\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, que

$$\int_X \mathbb{I}_A d\mu = \mu(A)$$

(también se usan las notaciones χ_A ó 1_A con el mismo significado $\mathbb{I}_A$).

Tenga en cuenta, por cierto, que si $(X_j)_{j\in J}$ es una clase finita de conjuntos en $\mathcal{M}$, disjuntos dos a dos y unión X y si $(a_j)_{j\in J}$ es una familia de elementos de $\mathbb{R}_+$, entonces la función simple correspondiente $f\colon X \to \mathbb{R}_+$, que toma el valor constante a_j en X_j se puede caracterizar por

$$f(x) = \sum_{j\in J} a_j \mathbb{I}_{X_j}(x).$$

Lema 2.104. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sean $f, g\colon X \to \mathbb{R}_+$ dos funciones simples. Existe entonces una partición de X adaptada simultáneamente a f y g.

Prueba. Sean $(X_j)_{j\in J}$ y $(X'_k)_{k\in K}$ dos familias finitas de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos y de unión X, tal que f es constante en cada X_j y que g sea constante en cada X'_k. Basta notar que los conjuntos medibles $X_j \cap X'_k,\ (j,k) \in J \times K$, son disjuntos dos a dos y de unión X, constituyen una familia finita y en cada una de ellas tanto f como g son constantes.

Teorema 2.105 (Monotonía y linealidad)**.** Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y dos funciones simples $f, g\colon X \to \mathbb{R}_+$, se tiene

1. Para cada $x \in X,\ f(x) \leq g(x)$, implica

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu;$$

2. La función $f + g\colon X \to \mathbb{R}_+$ es simple y

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

3. Para todo $a \in \mathbb{R}_+$, la función $af\colon X \to \mathbb{R}_+$ también es simple y

$$\int af d\mu = a \int f d\mu.$$

Prueba. Por el Lema 2.104, se puede considerar una familia finita de conjuntos medibles $(X_j)_{j\in J}$ disjuntos dos a dos y de unión X tal que, para cada $x \in X_j,\ f(x) = a_j$ y $g(x) = b_j$ funciones simples. Bajo las condiciones de 1. Se tiene que, para cada $f(x) \leq g(x)$, implica que $a_j \leq b_j$ y si $X_j = \emptyset$, entonces ambos miembros son 0, caso contrario, $a_j\mu(X_j) \leq b_j\mu(X_j)$ y de aquí se deduce que

$$\int f d\mu = \sum_{j\in J} a_j\mu(X_j) \leq \sum_{j\in J} b_j\mu(X_j) = \int g d\mu.$$

Por otro lado, toda vez que $f + g$ y af son funciones que en cada X_j toman los valores constantes $a_j + b_j$ y $a \cdot a_j$, respectivamente, se observa que estas funciones son simples y que

$$\begin{aligned}\textstyle\int (f+g)d\mu &= \textstyle\sum_{j\in J}(a_j+b_j)\mu(X_j) = \sum_{j\in J} a_j\mu(X_j) + \sum_{j\in J} b_j\mu(X_j) = \int f d\mu + \int g d\mu,\\ \textstyle\int af d\mu &= \textstyle\sum_{j\in J}(a\cdot a_j)\mu(X_j) = a\sum_{j\in J} a_j\mu(X_j) = a\int f d\mu.\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

Definición 2.106. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una aplicación medible. Se define entonces la *integral* de f como elemento de $\overline{\mathbb{R}}_+$ que es el supremo del conjunto de integrales $\int h d\mu$, con $h\colon X \to \mathbb{R}_+$ función simple, verificando $h(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$ (una de estas funciones h es la función idénticamente nula, 0). La integral será denotada como antes,

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x).$$

o incluso, cuando se considera importante explicitar el dominio de la función.

$$\int_X f(x) d\mu(x).$$

Escolio 2.107. Nótese que, teniendo en cuenta la propiedad de monotonía de la integral del inciso 1. del Teorema 2.105, en el caso de que f sea una función simple, esta integral coincide con la dada en la Definición 2.99, ya que la referida es, en este caso, un máximo, alcanzado precisamente por $h = f$.

En el caso que $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-Álgebra de los borelianos y μ es una medida de Lebesgue, es común omitir la referencia explícita a μ y escribe

$$\int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

en vez de $\int f(x) d\mu(x)$.

Teorema 2.108. Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Se tiene entonces

1. Para la función medible $0\colon X \to \mathbb{R}_+$, que

$$\int 0 \; d\mu(x) = 0$$

y en el caso de que $\mu(X) = 0$ (o lo que es equivalente, $\mu = 0$), se tiene

$$\int f(x)d\mu(x) = 0,$$

para cada función medible $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$;

2. Si $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ son funciones medibles tales que $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$, entonces

$$\int f(x)d\mu(x) \leq \int g(x)d\mu(x);$$

3. Si $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una función medible y $a \in \mathbb{R}_+$, entonces

$$\int af(x)d\mu(x) = a \int f(x)d\mu(x).$$

Prueba.

1. La primera conclusión de la parte 1. resulta del hecho de que 0 es una función simple de integral igual a 0, que la integral de funciones medibles extiende la de fuciones simples y la segunda resulta de que, como ya hemos mencionado, en el caso que $\mu(X) = 0$, todas las funciones simples tienen integral igual a 0.

2. La conclusión de 2. se sigue directamente de la definición de integrales como supremos, ya que, si $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$, entonces toda función simple $h\colon X \to \mathbb{R}_+$ que verifica $h(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, verifica también que $\int h(x) \leq \int g(x)$, para cada $x \in X$. Tomando supremo sobre el conjunto de todas las funciones simples, se tiene la desigualdad deseada.

3. Para el caso $a = 0$, ésta una consecuencia de 1, pues

$$\int 0 \cdot f(x) d\mu(x) = \int 0 d\mu(x) = 0 = 0 \cdot \int f(x) d\mu(x)$$

En el caso que $a \neq 0$. Sea $h: X \to \mathbb{R}_+$ una función simple tal que $h(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$. Tenemos entonces que $ah: X \to \mathbb{R}_+$ es una función simple tal que $ah(x) \leq af(x)$, para cada $x \in X$, de donde deducimos que

$$\int h(x) d\mu(x) = \frac{1}{a} \int ah(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{a} \cdot af(x) d\mu(x),$$

lo que implica, teniendo en cuenta la definición de $\int f d\mu$ como un supremo, que

$$\int f(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{a} \int af(x) d\mu(x),$$

y por lo tanto

$$a \int f(x) d\mu(x) \leq \int af(x) d\mu(x).$$

Para justificar la desigualdad opuesta, aplicamos lo que acabamos de concluir a la función medible af y escalando $\frac{1}{a}$ y deducimos que

$$\int af(x) d\mu(x) = a \cdot \frac{1}{a} \int af(x) d\mu(x) \leq a \int \frac{1}{a} \cdot af(x) d\mu(x) = a \int f(x) d\mu(x)$$

que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 2.109. Se define $\delta_x: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a la medida de Dirac en el punto $x \in \mathbb{R}$, mediante

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

δ_x es una medida de probabilidad en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Si $x_n,\ n \geq 1$ es una sucesión de números reales y $P_n,\ n \geq 1$ es una sucesión de números positivos enteros entonces

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \delta_x(A)$$

define una medida de Lebesgue-Stieltjes concentrada en el conjunto numerable $\{x_n,\ n \geq 1\}$. Si $\sum P_n < \infty$, la medida es finita y si $\sum P_n = 1$, es una medida de probabilidad. Si es una función cualquiera entonces

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} P_n f(x_n),$$

En el caso particular $P_n = 1$, para todo n y $f(x) = x$, se obtiene la serie $\sum x_n$, de modo que la teoría de series absolutamente convergentes de números reales es un caso particular de la integral de Riemann-Stieltjes.

Lema 2.110. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $h\colon X \to \mathbb{R}_+$ una función simple. Para cada $A \in \mathcal{M}$, se puede entonces considerar el espacio de medida restricto $(A, \mathcal{M}_{|\mathcal{A}}, \mu_{|A})$ (según la Definición 2.32) y son simples las aplicaciones $h_{|A}\colon A \to \mathbb{R}_+$ y $h \cdot \mathbb{I}_A : X \to \mathbb{R}_+$. A continuación, se define una nueva medida $\mu(h)\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, con

$$\mu_{(h)}(A) = \int h_{|A}(x) d\mu_{|A}(x) = \int h(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x).$$

Prueba. sea $(X_j)_{j\in J}$ una familia finita de conjuntos medibles, disjuntos y de unión X y $(a_j)_{j\in J}$ una familia de elementos $\mathbb{R}_+$, tales que para cada $x \in X_j,\ h(x) = a_j$. Entonces A es una unión de los conjunto medibles, disjuntos dos a dos $A \cap X_j$, donde $h_{|A}$ toma el valor constante a_j y X es unión de la clase de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos $X \setminus A$ y $A \cap X_j$, donde $h \cdot \mathbb{I}_A$ toma los valores constantes 0 o a_j, lo que demuestra que las funciones $h_{|A}\colon A \to \mathbb{R}_+$ y $h \cdot \mathbb{I}_A\colon X \to \mathbb{R}_+$ son simples y además introduciendo la función indicatriz

$$\int h_{|A}(x) d\mu_{|A}(x) = \sum_{j\in J} a_j \mu(A \cap X_j) = 0 \cdot \mu(X \backslash A) + \sum_{j\in J} a_i \mu(A \cap X_j) = \int h(x)\mathbb{I}_A d\mu(x). \tag{2.4}$$

En particular, se puede definir $u_{(h)}(A)$ indiferentemente para las dos igualdades en el enunciado, así como para el segundo miembro de la igualdad 2.4. Se tiene que

$$u_{(h)}(\emptyset) = \sum_{j\in J} a_j \mu(\emptyset \cap X_j) = 0.$$

Sea ahora $(A_k)_{k\in K}$ una familia contable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y con $A = \bigcup_{k\in K} A_k$. Se tiene entonces que, para cada $j \in J$, $A \cap X_j$ es la unión de la familia contable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos $A_k \cap X_j$ y por lo tanto, teniendo en cuenta la fórmula obtenida anteriormente de $\mu_{(h)}(A)$ y la propiedad de Fubini para las sumas en la Proposición 2.13

$$\begin{aligned} u_{(h)}(A) &= \textstyle\sum_{j\in J} a_j \mu(A \cap X_j) = \sum_{j\in J} a_j \left(\sum_{k\in K} \mu(A_k \cap X_j)\right) = \\ &= \textstyle\sum_{j\in J} \left(\sum_{k\in K} a_j \mu(A_k \cap X_j)\right) = \sum_{k\in K} \left(\sum_{j\in J} a_j \mu(A_k \cap X_j)\right) = \\ &= \textstyle\sum_{k\in K} \mu_{(h)}(A_k). \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\mu_{(h)}$ es efectivamente una medida en σ-Álgebra $\mathcal{M}$.

Teorema 2.111 (Teorema de la Convergencia Monótona)**.** Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ crecientes; esto es, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para cada $x \in X$. Se puede entonces considerar una función medible $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $f_n(x) \to f(x)$, para cada $x \in X$ y se tiene que

$$\int f_n(x) d\mu(x) \to \int f(x) d\mu(x).$$

Prueba. En $\overline{\mathbb{R}}_+$; para cada $x \in X$, el hecho de que la sucesión de $f_n(x)$ sea monótona creciente implica que converge en $\overline{\mathbb{R}}_+$ al supremo de sus términos, que es por definición $f(x)$. El hecho que $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sea medible es una consecuencia del Teorema 2.92 o alternativamente, del

Teorema 2.91. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\ell_n = \int f_n(x) d\mu(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

y nótese teniendo en cuenta la línea 2 de Teorema 2.108 que, $\ell_n \leq \ell_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{R}$ y por lo tanto, siendo ℓ el supremo del conjunto de los ℓ_n, tal que $\ell_n \to \ell$ en $\overline{\mathbb{R}}_+$. Se tiene que probar que

$$\ell = \int f(x) d\mu(x)$$

y en este sentido, note de ahora en adelante que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, se observa

$$\ell_n = \int f_n(x) d\mu(x) \leq \int f(x) d\mu(x),$$

de lo cual, debido a que tomando el supremo sobre los ℓ_n amos miembros, implica que

$$\ell \leq \int f(x) d\mu(x).$$

Queda por probar que también que se tiene

$$\int f(x) d\mu(x) \leq \ell$$

y teniendo en cuenta la definición de integral en el primer miembro como supremo, bastará probar que, siendo $h\colon X \to \mathbb{R}_+$ una función simple arbitraria, tal que $h(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, se tenga

$$\int h(x) d\mu(x) \leq \ell.$$

Suponga por reducción al absurdo, que esto no sucediera, es decir, que

$$\ell < \int h(x) d\mu(x). \tag{2.5}$$

Fije $0 < \rho < 1$ tal que aún se tenga

$$\ell < \rho \int h(x) d\mu(x) \tag{2.6}$$

(Si el segundo miembro de la desigualdad (2.5) es $+\infty$ cualquier ρ servirá; de lo contrario sólo tome $\ell / \int h d\mu < \rho < 1$). Para cada $n \in \mathbb{N}$, denote por

$$X_n = \{x \in X \mid \rho h(x) \leq f_n(x)\},$$

conjunto que es medible por el Teorema 2.91.[13] El hecho de que la sucesión de $f_n(x)$ sea creciente, para cada $x \in X$, implica que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset X_{n+1}$ y se tiene $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$, ya que, para cada $x \in X$, o $h(x) = 0$ y entonces $x \in X_n, \forall n \in \mathbb{N}$ o $h(0) > 0$ y entonces $\rho h(x) < h(x) \leq f(x)$, donde, por ser $f(x)$ es el supremo de los $f_n(x)$, $\rho h(x) < f_n(x)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, para el cual se tiene por tanto $x \in X_n$. Considere ahora una medida $\mu_{(\rho h)}$ asociado con una función simple $\rho h \colon X \to \mathbb{R}_+$ (Véase el Lema 2.110). El hecho de que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, se tiene $\rho h(x) \mathbb{I}_{X_n}(x) \leq f_n(x)$ (si $x \notin X_n$, el primer miembro es 0 y, si $x \in X_n$, el primer miembro es $\rho h(x)$) implica que

$$\mu_{(\rho h)}(X_n) = \int \rho h(x) \mathbb{I}_{X_n}(x) d\mu(x) \leq \int f_n(x) d\mu(x) = \ell_n \leq \ell$$

y por tanto, teniendo en cuenta la procedencia de las medidas del inciso 5) de la Proposición 2.31.

$$\rho \int h(x) d\mu(x) = \int \rho h(x) d\mu(x) = \mu_{(\rho h)}(X) = \lim \mu_{(\rho h)}(X_n) \leq \ell,$$

cual es absurdo, por contradecir la desigualdad (2.6).

Como aplicación se presenta el siguiente

[13] Este es el primer punto donde se esté considerando funciones medibles

Ejemplo 2.112. El número de Euler γ está dado por la fórmula

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-1}}{t}dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

Se muestra que

$$-\gamma = \lim_{n\to\infty}(\int_0^1 \frac{(1-t/n)^n - 1}{t}dt + \int_1^n \frac{(1-t/n)^n}{t}dt)$$

La primera integral crece a $(e^{-t}-1)/t$ y la segunda a e^{-t}/t. Se tiene que el límite de la integral es a la integral del límite (paso del límite bajo el signo de integral).

Teorema 2.113. Sea un espacio medible $(X,\mathcal{M})$ y $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $f_n\colon X \to \mathbb{R}_+$ tal que, para cada $x \in X,\ f_n(x) \to f(x)$.

Prueba. Se va a dividir la demostración en cuatro partes:

Parte 1 Denote

$$X_\infty = \{x \in X \mid f(x) = +\infty\},$$

se afirma que éste es un subconjunto medible de X, por ser boreliano y para cada $n, p \in \mathbb{N}$,

$$X_{n,p} = \{x \in X \mid \frac{p-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{p}{2^n}\},$$

que es también un subconjunto medible de X y nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $X_{n,p}, p \in \mathbb{N}$ son disjuntos dos a dos y de unión $X \setminus X_\infty$.

Parte 2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $g_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} (p-1)/2^n, & \text{si } x \in X_{n,p}, \\ \infty, & \text{si } x \in X_\infty. \end{cases}$$

función que es medible al tener una restricción constante, que es en particular medible, para cada uno de los conjuntos medibles X_∞ y $X_{n,p},\ p \in \mathbb{N}$, de unión X (Cf. la Proposición 2.66).[14]

Parte 3 Ahora se va a verificar que, para cada $x \in X$, la sucesión $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y con $g_n(x) \to f(x)$.

Si $x \in X_\infty$, esto es si $f(x) = +\infty$, esto resulta de tener $g_n(x) = +\infty$, para todo x. Caso contrario, se tiene que $f(x) < +\infty$ y la afirmación resulta de que, para cada $n \in \mathbb{N},\ g_n(x) \le g_{n+1}(x)$ y

$$f(x) - \frac{1}{2^n} < g_n(x) \le f(x). \tag{2.7}$$

Ahora, siendo $p \in \mathbb{N}$, tal que $x \in X_{n,p}$, se observa

$$\frac{p-1}{2^n} \le f(x) < \frac{p}{2^n}, \tag{2.8}$$

esto es,

$$g_n(x) \le f(x) < g_n(x) + \frac{1}{2^n},$$

condiciones equivalentes a (2.7) y por otro lado, escribiendo (2.8) en la forma

$$\frac{2p-2}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2p}{2^{n+1}},$$

se observa que, o

$$\frac{2p-2}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2p-1}{2^{n+1}} \quad \text{ó} \quad \frac{2p-1}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2p}{2^{n+1}},$$

[14] Las funciones g_n no son en general simples, ya que pueden tomar el valor $+\infty$ y un número infinito de valores reales (aunque discretos).

teniendo, en el primer caso, $x \in X_{n+1,2p-1}$ y por lo tanto $g_{n+1}(x) = \frac{2p-2}{2^{n+1}}$ y en el segundo caso, $x \in X_{n+1,2p}$ y por lo tanto $g_{n+1}(x) = \frac{2p-1}{2^{n+1}}$, en ambos casos,

$$g_n(x) = \frac{p-1}{2^n} = \frac{2p-2}{2^{n+1}} \leq g_{n+1}(x).$$

Parte 4 Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to \mathbb{R}_+$ la función medible definida por

$$f_n(x) = \min\{g_n(x), n\}$$

(Cf. el Teorema 2.91), función que es simple, tomando sólo un número finito de valores, a saber, los de la forma $p/2^n$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq p \leq 2^n \cdot n$ (en la siguiente Figura se representa, para los primeros valores de n, los valores posibles para $f_n(x)$).

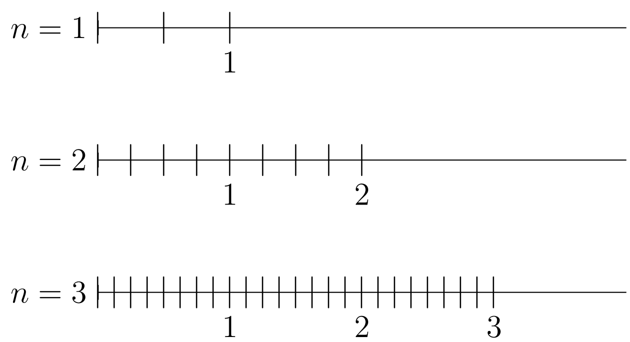

Figura 2.1: Primeros valores para $f_n(x)$.

Estas funciones simples comprueban, para cada $x \in X$, las condiciones del enunciados, específicamente $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ y $f_n(x) \to f(x)$.

Se tiene:

$$f_n(x) \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \quad \text{y} \quad f_n(x) \leq n \leq n+1.$$

se concluye que

$$f_n(x) \leq \min\{g_{n+1}(x), n+1\} = f_{n+1}(x).$$

Si $x \in X_\infty$, se tiene $f(x) = +\infty$ y $g_n(x) = +\infty$, por lo que $f_n(x) = n$, lo que implica que $f_n(x) \to +\infty = f(x)$. Si $x \notin X_\infty$, tenemos que $f(x) < +\infty$ y eligiendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq f(x)$, tenemos, para cada $n \geq n_0,\ g_n(x) \leq f(x) \leq n$, donde

$$f_n(x) = \min\{g_n(x), n\} = g_n(x),$$

por lo que, por ser $g_n(x) \to f(x)$, se tiene también que $f_n(x) \to f(x)$.

Proposición 2.114 (Aditividad)**.** Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dos aplicaciones medibles se tiene entonces

$$\int [f(x) + g(x)] d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x).$$

Prueba. Teniendo en cuenta el Teorema 2.113, se puede considerar dos sucesiones crecientes de funciones simples $f_n, g_n\colon X \to \mathbb{R}_+$ tales que, $f_n(x) \to f(x)$ y $g_n(x) \to g(x),\ \forall x \in X$. entonces con una función simple $f_n + g_n\colon X \to \mathbb{R}_+$ para la cual se tiene, para cada $x \in X$ que $f_n(x) + g_n(x) \to f(x) + g(x)$. Tomando en consideración el teorema de convergencia monótona y la conclusión de la parte 2. del Teorema 2.105 que

$$\int [f_n(x) + g_n(x)] d\mu(x) = \int f_n(x) d\mu(x) + \int g_n(x) d\mu(x).$$

se tiene por un lado, el límite $\int [f(x) + g(x)] d\mu(x)$ y por otro lado, el límite $\int f(x) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x)$, lo que implica que

$$\int [f(x) + g(x)] d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x).$$

Proposición 2.115 (Aditividad contable)**.** Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(f_j)_{j \in J}$, una familia contable de funciones medibles $f_j\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Entonces es medible la función

$\sum_{j\in J} f_j\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $(\sum_{j\in J} f_j)(x) = \sum_{j\in J} f_j(x)$, y se tiene

$$\int \sum_{j\in J} f_j(x)d\mu(x) = \sum_{j\in J} \int f_j(x)d\mu(x)$$

Prueba. J es finito por aditividad, por el principio de inducción sobre el número de elementos de J teniendo en consideración el hecho que la integral de la función idénticamente nula, es igual a cero. Para el caso numerable; basta por un cambio del conjunto de índices, se examina el caso en que $J = \mathbb{N}$, ahora en este caso se sabe por la Proposición 2.9 que se tiene $(\sum_{j\in J} f_j)(x) = \lim S_n(x)$,donde $S_n(x) = \sum\limits_{j\in J} f_j(x)$, y por tanto los $S_n(x)$ constituyen una sucesión creciente. Ya que, para el caso finito, los $S_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ son funciones medibles, con

$$\int S_n(x)d\mu(x) = \sum_{j\in J}^{n} \int f_j(x)d\mu(x)$$

se implica del Teorema 2.111, teniendo una vez más en cuenta la Proposición 2.9 que

$$\int \sum_{j\in \mathbb{N}} f_j d\mu(x) = \lim \int S_n(x)d\mu(x) = \lim \sum_{j=1}^{n} \int f_j(x)d\mu(x) = \sum_{j\in \mathbb{N}} \int f_j(x)d\mu(x).$$

Proposición 2.116 (Medida definida por una función medible)**.** Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible. Para todo $A \in \mathcal{M}$, se puede entonces considerar el espacio de medida restringida $(A, \mathcal{M}_{|\mathcal{A}}, \mu_{|A})$ (Cf. la Definición 2.32) y la medida $\mu_{(f)}\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por

$$\mu_{(f)}(A) = \int f_{|A}(x)d\mu_{|A}(x) = \int f(x)\mathbb{I}_A(x)d\mu(x).$$ [15]

Se teiene además de eso que $\mu_{(f)}(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$, tal que $\mu(A) = 0$.

[15] La que damos un nombre de medida asociada a función medible f.

Prueba. Recuérdese que la conclusión es ya conocida en el caso que f sea función simple (Cf. el Lema 2.110). Suponiendo ahora que $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sea función medible, considere por el Teorema 2.113 una sucesión creciente de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}_+$ simples, tales que $f_n(X) \to f(x)$, para cada $x \in X$. Para cada $A \in \mathcal{M}$, se tiene entonces sucesiones crecientes de funciones simples $f_n \cdot I_A\colon X \to \mathbb{R}_+$ y $f_{n|A}\colon A \to \mathbb{R}_+$, con $(f_n \cdot I_A)(x) \to f(x)I_A(x)$, para cada $x \in X$ y $f_{n|A}(x) \to f_{|A}(x)$ para cada $x \in X$ y por tanto teniendo en cuenta el caso ya conocido y el teorema de convergencia monótona.

$$\int f_{|A}(x)d\mu_{|A}(x) = \lim \int f_{n|A}(x)d\mu_{/A}(x) = \lim \int f_n(x)\mathbb{I}_A(x)d\mu(x) = \int f(x)\mathbb{I}_A(x)d\mu(x)$$

Se puede ahora definir una aplicación $\mu_{(f)}\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ por cualquiera de las dos caracterizaciones en el enunciado y utilizando la segunda, se observa que $\mu_{(f)}(\phi) = \int 0 d\mu(x) = 0$ y para que, una familia contable de conjuntos $(A_j)_{j\in J}$ sea medible y disjuntos dos a dos, con $A = \bigcup\limits_{j\in J} A_j$, el hecho de ser $\mathbb{I}_A(X) = \sum_{j\in J} \mathbb{I}_{A_j}(X)$ para cada $x \in X$; implica, por la Proposición 2.115, que

$$\mathbb{I}_{(f)}(A) = \int f(x)\mathbb{I}_A(x)d\mu(x) = \sum_{j\in J} \int f(x)\mathbb{I}_{A_j}(x)d\mu(x) = \sum_{j\in J} \mu_{(f)}(A_j)$$

lo que muestra que tenemos efectivamente una medida $\mu_{(f)}$ de la σ-Álgebra $\mathcal{M}$. El hecho de tener $\mu_{(f)}(A_j) = 0$, siempre que $\mu(A) = 0$ es una consecuencia de la primera caracterización de $\mu_{(f)}(A)$ teniendo en cuenta lo referido en la línea 1. del Teorema 2.108.

Escolio 2.117. En general, siempre que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sea un espacio de medida y $A \in \mathcal{M}$, se usa la notación

$$\int_A f(x)d\mu(x)$$

para significar $\int f_{|A}(x)d\mu_{|A}(x)$, siempre que f es una función definida en una parte de X contenido en A, cuya restricción a A sea medible. En el caso en que $X = \mathbb{R}$ y μ, la medida de Lebesgue de los borelianos de $\mathbb{R}$, se escribe también simplemente

$$\int_A f(x)d(x),$$

con esta notación la primera caracterización de $\mu_{(f)}(A)$ en Proposición 2.116 puede ser también escrita en la forma

$$\mu_{(f)}(A) = \int_A f(x)d\mu(x)$$

Corolario 2.118. Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, una función medible $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $Y \subset X$ un conjunto medible, con $\mu(Y) = 0$ se tiene entonces

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_{X\setminus Y} f(x)d\mu(x).$$

Prueba. Puesto que también se tiene $\mu_{(f)}(Y) = 0$, se deduce que

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \mu_{(f)}(X) = \mu_{(f)}(X \setminus Y) + \mu_{(f)}(Y) = \int_{X\setminus Y} f(x)d\mu(x).$$

Proposición 2.119 (Complemento de la línea 3. del Teorema 2.108)**.** Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible. Se tiene entonces

$$\int (+\infty) \cdot f(x)d\mu(x) = (+\infty) \cdot \int f(x)d\mu(x).$$

Prueba. Se comienza por definir para cada $x \in X$ la sucesión $(nf(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ es creciente y tiene límite $(+\infty) \cdot f(x)$. Entonces aplicando el Teorema 2.111, se obtiene

$$\int (+\infty) \cdot f(x)d\mu(x) = \lim \int nf(x)d\mu(x) = \lim n \int f(x)d\mu(x) = (+\infty) \cdot \int f(x)d\mu(x).$$

Corolario 2.120. Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, con $\mu(X) \neq 0$; entonces

$$\int_X (+\infty) d\mu(x) = (+\infty)$$

Prueba. Puesto que la función constante 1 es simple y con

$$\int_X 1 d\mu(x) = \mu(X) > 0$$

Se deduce que

$$\int_X (+\infty) d\mu(x) = \int_X (+\infty) \cdot 1 d\mu(x) = (+\infty) \cdot \mu(X) = +\infty$$

Corolario 2.121. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida, tal que $\mu(X) \neq 0$ y $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sea una aplicación medible tal que $f(x) > 0$, para cada $x \in X$ se tiene entonces

$$\int_X f(x) d\mu(x) > 0$$

Prueba. Toda vez que $(+\infty) \cdot f(x) = +\infty$, para cada $x \in X$ podemos tener en cuenta el corolario precedente para deducir que

$$(+\infty) \cdot \int f(x) d\mu(x) = \int (+\infty) \cdot f(x) d\mu(x) = \int_X (+\infty) d\mu(x) = +\infty,$$

por tanto $\int f(x) d\mu(x) > 0$.

Definición 2.122. En un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, se dice que una propiedad relativa a los puntos $x \in X$ es *verdadera casi siempre* (o verdadera en casi todos los puntos de X), si existe un conjunto $Y \in \mathcal{M}$, con $\mu(Y) = 0$, tal que la propiedad es verdadera para cada $x \in X \setminus Y$.

En particular, si una propiedad es verdadera para todo el $x \in X$; entonces ella también es verdadera casi siempre, visto que se puede considerar para Y el conjunto vacío $\emptyset$. Es también claro que, si una propiedad es verdadera casi siempre y es falso para todo x en cierto conjunto medible Y', entonces $\mu(Y') = 0$ (relativo a esta definición se debe tener que $Y' \subset Y$). En particular, si el conjunto Y' de los puntos en que la propiedad es falsa fuera medible, la propiedad es verdadera casi siempre si y sólo si $\mu(Y') = 0$.

Un hecho importante, que será aplicado en adelante es que dos propiedades son verdaderas casi siempre, entonces su conjunción y también es verdadera casi siempre una vez que siendo $Y, Y' \in \mathcal{M}$, con $\mu(Y) = 0$ y $\mu(Y') = 0$ tales que la primera propiedad sea verdadera para cada $x \in X \setminus Y$ y la segunda será verdadera para cada $x \in X \setminus Y'$, entonces $Y \cup Y' \in \mathcal{M}$ verifica todavía $\mu(Y \cup Y') = 0$, y las dos propiedades son simultáneamente verdaderas para cada $x \in X \setminus (Y \cup Y')$.

Corolario 2.123. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible tal que

$$\int f(x) d\mu(x) < +\infty$$

se tiene entonces $f(x) < +\infty$ casi siempre, esto es, existe $Y \in \mathcal{M}$ con $\mu(Y) = 0$, tal que $f(x) < +\infty$ para cada $x \in X \setminus Y$.[16]

Prueba. Para $Y \in \mathcal{M}$ el conjunto de los puntos $x \in X$ tales que $f(x) = +\infty$, se tiene

$$\int_Y (+\infty) d\mu(x) = \mu_{(f)}(Y) \leq \mu_{(f)}(X) = \int_X f(x) d\mu(x) < +\infty,$$

[16]Por el contrario, de tenerse $f(x) < +\infty$ casi siempre, no se puede deducir que $\int f d\mu < \infty$; basta pensar en por ejemplo, una función de valor constante 1, en un espacio de medida $+\infty$.

donde por el Corolario 2.120, $\mu(Y) = 0$.

Corolario 2.124. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible, se tiene entonces

$$\int f(x) d\mu(x) = 0,$$

si y sólo si $f(x) = 0$ casi siempre; esto es, si y sólo si existe $Y \in \mathcal{M}$, con $\mu(Y) = 0$, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in X \setminus Y$,

Prueba. Suponga que exista $Y \in \mathcal{M}$, con $\mu(Y) = 0$, tal que $f(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus Y$. Teniendo en cuenta la línea 1. del Teorema 2.108 y del Corolario 2.118, se tiene entonces

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X\setminus Y} f(x) d\mu(x) = 0.$$

Suponga, recíprocamente que $\int_X f(x) d\mu(x) = 0$ y sea $Y \in \mathcal{M}$ el conjunto de los $x \in X$ tales que $f(x) > 0$, se tiene entonces

$$\int_Y f(x) d\mu(x) = \mu_{(f)}(Y) \leq \mu_{(f)}(X) = \int_X f(x) d\mu(x) = 0$$

y por tanto teniendo en cuenta el corolario 2.121, se tiene $\mu(Y) = 0$.

Corolario 2.125. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, dos aplicaciones medibles tales que $f(x) \leq g(x)$ casi siempre. Entonces

$$\int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X g(x) d\mu(x).$$

En particular, si $f(x) = g(x)$ casi siempre, entonces por monotonía

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

Prueba. Teniendo en cuenta el corolario 2.118, siendo $Y \in \mathcal{M}$, con $\mu(Y) = 0$; tal que, para cada $x \in X \setminus Y,\ f(x) \leq g(x)$, se tiene por monotonía

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_{X\setminus Y} f(x)d\mu(x) \leq \int_{X\setminus Y} g(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x).$$

Proposición 2.126 (La integral para la medida de conteo)**.** Sea X un conjunto y considere $\mathcal{P}(X)$ la σ-Álgebra de todos los subconjuntos de X y la medida de conteo $\nu \colon \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (Cf. la Definición 2.34) para cada función $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se tiene entonces que f es medible y

$$\int_X f(x)d\nu(x) = \sum_{x\in X} f(x).$$

En particular, recordando la Proposición 2.16, si $\int_X f(x)d\nu(x) < +\infty$, entonces existe un conjunto contable $Y \subset X$ tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in X \setminus Y$.

Prueba. Se va a dividir la demostración en cuatro partes:

Parte 1 El hecho de ser f medible es consecuencia directa de que la σ-Álgebra considerada es la σ-Álgebra de todas las partes de X.

Parte 2 Se va a mostrar que la igualdad del enunciado es verdadera en el caso $f \colon X \to \mathbb{R}_+$ sea función simple: En efecto, sea $(X_i)_{i\in I}$, una familia finita de subconjuntos de X disjuntos dos a dos y de unión X, tal que $f(x)$ tome el valor constante a_i para $x \in X_i$. Se tiene entonces recordando la propiedad asociativa de las sumas,

$$\int_X f(x)d\nu(x) = \sum_{i\in I} a_i\nu(X_i) = \sum_{i\in I} a_i\Big(\sum_{x\in X_i} 1\Big) = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{x\in X_i} a_i\Big) = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{x\in X_i} f(x)\Big) = \sum_{x\in X} f(x)$$

Parte 3 Se muestra que

$$\sum_{x\in X} f(x) \leq \int_X f(x)d\nu(x)$$

En efecto; note que, si existe $x \in X$ tal que $f(x) = +\infty$ la desigualdad es verdadera, por ser el segundo miembro $+\infty$ (Cf. el Corolario 2.123 teniendo en cuenta el hecho de, para la medida de conteo, $\nu(A) = 0$, implica que $A = \emptyset$). Suponga entonces que $f(x) < +\infty$, para todo $x \in X$. Sea $A \subset X$ un subconjunto finito arbitrario. Se tiene entonces que la función $f \cdot I_A$ es una función simple, con una partición adaptada constituida por los conjuntos unitarios $\{x\},\ x \in A$, donde toma el valor $f(x)$ y por el conjunto $X \setminus A$ donde toma el valor 0, ya que $f(x)I_A(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, entonces

$$\sum_{x \in A} f(x) = 0 \cdot \nu(X \setminus A) + \sum_{x \in A} f(x)\nu(\{x\}) = \int_X f(x) \cdot I_A(x) d\nu(x) \leq \int_X f(x) d\nu(x)$$

teniendo en cuenta la definición de $\sum_{x \in X} f(x)$ como supremo de todas las sumas parciales finitas, se concluye así la desigualdad.

Parte 4 se va a verificar, finalmente la desigualdad opuesta

$$\int_X f(x) d\nu(x) \leq \sum_{x \in X} f(x)$$

En efecto: Sea $g\colon X \to \mathbb{R}_+$ una función simple arbitraria, con $g(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$. Teniéndose en cuenta el que se vió en 2), se tiene entonces

$$\int_X g(x) d\nu(x) = \sum_{x \in X} g(x) \leq \sum_{x \in X} f(x),$$

y teniendo en cuenta la integral de una función medible en su definición, como supremo de integrales de funciones simples, implica la desigualdad enunciada.

Lema 2.127 (Fatou)**.** Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y una sucesión $(f_n)_{n \in N}$ de funciones $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medibles, tales que $f_n(x) \to f(x)$, para cada $x \in X$ se tiene entonces, para la función medible $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ así definida cualquiera que sea

$$l < \int f(x) d\mu(x),$$

existe entonces $n_0 \in N$ de tal manera que, para todo $n \geq n_0$,

$$l < \int f_n(x) d\mu(x)$$

Prueba. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sean $g_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ funciones medibles definidas por

$$g_n(x) = \inf_{p \geq n} f_p(x)$$

(Cf. el Teorema 2.91) y recuerde que, como refiere el Teorema 2.92, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, es medible y $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$. Ya que, para cada $x \in X$ la sucesión de los $g_n(x)$ es creciente, se tiene también $g_n(x) \to f(x)$ donde por el teorema de la convergencia monotóna.

$$\int g_n(x) d\mu(x) \to \int f(x) d\mu(x)$$

siendo $l < \int f(x) d\mu(x)$ arbitraria, existe si n_0 tal que, para cada $n \geq n_0$, $l < \int g_n(x) d\mu(x)$ y entonces el hecho de tener para cada x, $g_n(x) \leq f_n(x)$, por tanto

$$\int g_n(x) d\mu(x) \leq \int f_n(x) d\mu(x)$$

implica que también se tiene $l < \int f_n(x) d\mu(x)$.

Teorema 2.128 (Convergencia dominada)**.** Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, tales que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$ y que exista una aplicación medible $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ con

$$\int_X g(x) d\mu(x) < +\infty$$

y $f_n(x) \leq g(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ se tiene entonces, para la función medible $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ así definida

$$\int_X f_n(x)d\mu(x) \to \int_X f(x)d\mu(x).$$

Prueba. Se tiene $f_n(x) \to f(x)$ con $f_n(x) \leq g(x)$, se concluye también que $f(x) \leq g(x)$.

Por hipótesis se tiene $g(x) < +\infty$, para todo $x \in X$. La función g y por tanto las funciones f_n y f toman así valores en $\mathbb{R}$, Teniendo en cuenta la línea 2) del Teorema 2.88 se puede considerar las funciones medibles $g - f_n\colon X \to \mathbb{R}_+$ y $g - f\colon X \to \mathbb{R}_+$ para las cuales se tiene $g(x) - f_n(x) \to g(x) - f(x)$, para cada $x \in X$, como $g(x) = [g(x) - f(x)] + f(x)$ y $g(x) = [g(x) - f_n(x)] + f_n(x)$ se deduce que

$$\int_X g(x)d\mu(x) = \int_X [g(x) - f(x)]d\mu(x) + \int_X f(x)d\mu(x), \tag{2.9}$$

$$\int_X g(x)d\mu(x) = \int_X [g(x) - f_n(x)]d\mu(x) + \int_X f_n(x)d\mu(x),$$

en particular las integrales que están en el segundo miembro también son finitas. Sea $\delta > 0$ arbitrario. Aplicando el lema de Fatou, las sucesiones de funciones $f_n(x) \to f(x)$ y $g(x) - f_n(x) \to g(x) - f(x)$ y escogiendo a la mayor de las dos anteriores, se observa que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $n \geq n_0$,

$$\int f_n d\mu > \Big(\int f d\mu\Big) - \delta, \qquad \int [g - f_n]d\mu > \Big(\int [g - f]d\mu\Big) - \delta,$$

en la que en la segunda desigualdad, teniendo en cuenta la identidad (2.9) puede ser escrita en las formas equivalentes

$$\int g d\mu - \int f_n d\mu > \int g d\mu - \Big(\int f d\mu\Big) - \delta, \qquad \int f_n d\mu < \Big(\int f d\mu\Big) + \delta,$$

se concluye así que, para cada $n \leq n_0$,

$$\left(\int f d\mu\right) - \delta < \int f_n d\mu < \left(\int f d\mu\right) + \delta$$

lo que muestra que se tiene efectivamente, $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Ahora se tiene que $g(x) < +\infty$, para cada $x \in X$. Recuerde que por el Corolario 2.123, existe $Y \in \mathcal{M}$, con $\mu(Y) = 0$, tal que $g(x) < +\infty$, para cada $x \in X \setminus Y$, así por estar

$$\int_{X \setminus Y} g(y) d\mu(y) = \mu_{(g)}(X \setminus Y) \leq \mu_{(g)}(X) = \int_X g(x) d\mu(y) < +\infty$$

se pueden aplicar el caso ya estudiado de las restricciones de f y de los f_n a $X \setminus Y$ para concluir se tiene en cuenta el Corolario 2.118 que

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_{X \setminus Y} f_n(x) d\mu(x) \to \int_{X \setminus Y} f(X) d\mu(X) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

Proposición 2.129 (La integral para la medida $\mu_{(f)}$). Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y una función medible $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y considere la medida correspondiente $\mu_{(f)}\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, definida en la Proposición 2.116 para cada aplicación medible $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, se tiene entonces

$$\int g(x) d\mu_{(f)}(x) = \int g(x) f(x) d\mu(x).$$

Prueba. En el caso en que g es una función indicatriz $\mathbb{I}_A$ de un conjunto $A \in \mathcal{M}$, la igualdad del enunciado se reduce a la definición de $\mu_{(f)}$,

$$\int \mathbb{I}_A(x) d\mu_{(f)}(x) = \mu_{(f)}(A) = \int \mathbb{I}_A(x) f(x) d\mu(x).$$

suponga que $g\colon X \to \mathbb{R}_+$, es una función simple y sea $(X_j)_{j \in J}$ una familia finita de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos y de unión X tal que, para cada $x \in X_j,\ g(x) = a_j \in \mathbb{R}_+$, se tiene entonces para cada $x \in X,\ g(x) = \sum_{j\in J} a_j I_{X_j}(x)$ donde se tiene en cuenta la Proposición 2.115 y la parte 3. del Teorema 2.108.

$$\int g(x)d\mu_{(f)}(x) = \sum_{j\in J} a_j \int I_{X_j}(x)d\mu(x) = \sum_{j\in J} a_j \int I_{X_j}(x)f(x)d\mu(x)$$
$$= \int \sum_{j\in J} a_j I_{X_j}(x)f(x)d\mu(x) = \int g(x)f(x)d\mu(x).$$

Supóngase que $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, sea una función medible arbitraria. Se puede considerar una sucesión creciente $g_n\colon X \to \mathbb{R}_+$ de funciones simples, tales que, para cada $x \in X,\ g_n(x) \to g(x)$ y por tanto $g(x)$ es el supremo de los $g_n(x)$. Las funciones medibles $g_n(x)f(x)$, establecen una sucesión creciente de funciones con $g_n(x)f(x) \to g(x)f(x)$, visto que, tanto en el caso en que $f(x) = 0$, como en aquel en que $g(x) = 0$, también se tiene que $g_n(x)f(x) = 0$, para todo n. Se puede entonces aplicar el Teorema 2.111 (convergencia monótona) y el caso particular, ya estudiado, de las funciones simples, para deducir que

$$\int g(x)d\mu_{(f)}(x) = \lim \int g_n(x)d\mu_{(f)}(x) = \lim \int g_n(x)f(x)d\mu(x) = \int g(x)f(x)d\mu(x).$$

Proposición 2.130 (Monotonía relativa a la medida)**.** Sea $(X, \mathcal{M})$, un espacio medible y $\mu, \mu'\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dos medidas tales que, para cada $A \in \mathcal{M},\ \mu(A) \leq \mu'(A)$, para cada aplicación medible $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, se tiene entonces

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X f(x)d\mu'(x).$$

Prueba. Comienze por el caso en que f sea una función simple y sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia finita de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y de unión X, tal que en cada X_i la función f toma el valor constante a_i. Se tiene entonces

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{i\in I} a_i \mu(X_i) \leq \sum_{i\in I} a_i \mu'(X_i) = \int_X f(x)d\mu'(x),$$

en el caso general en que $f: X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, sea medible, se puede aplicar directamente la definición de la integral como un supremo: Para cada función simple $h: X \to \mathbb{R}_+$, tal que $h(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$, se tiene

$$\int_X h(x) d\mu(x) \leq \int_X h(x) d\mu'(x) \leq \int_X f(x) d\mu'(x)$$

y de aquí se deduce la desigualdad del enunciado.

Proposición 2.131 (Adición de medidas y multiplicación por una constante)**.** Sean $(X, \mathcal{M})$, un espacio medible, $\mu, \mu': \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dos medidas y $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ y además considere las medidas $\mu + \mu': \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $a\mu: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (Cf. la Proposición 2.35) para cada función medible $f: X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, se tiene entonces

$$\int_X f(x) d(\mu + \mu')(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X f(x) d\mu'(x), \quad \int_X f(x) d(a\mu)(x) = a \int_X f(x) d\mu(x)$$

Prueba. Primero se prueba el caso en que f sea una aplicación simple y sea $(X_i)_{i \in I}$, una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y de unión X, tales que en cada X_i, la aplicación f toma el valor constante a_i. Se tiene que

$$\int_X f(x) d(\mu + \mu')(x) = \sum_{i \in I} a_i (\mu(X_i) + \mu'(X_i)) = \sum_{i \in I} a_i \mu(X_i) + \sum_{i \in I} a_i \mu'(X_i) =$$
$$= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X f(x) d\mu'(x),$$

similarmente se tiene

$$\int_X f(x) d(a\mu)(x) = \sum_{i \in I} a_i a \mu(X_i) = a \sum_{i \in I} a_i \mu(X_i) = a \int_X f(x) d\mu(x).$$

A continuación, para el caso general en el que $f: X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, sea una función medible, considere entonces una sucesión creciente $f_n: X \to \mathbb{R}_+$ de funciones simples, con $f_n(x) \to f(x)$ y por tanto con $f(x)$ siendo igual al supremo de los $f_n(x)$, para $x \in X$ (Cf. el Teorema 2.113) y aplicando el Teorema 2.111 (Convergencia monótona) para concluir que

$$\begin{aligned}\textstyle\int_X f(x)d(\mu+\mu')(x) &= \lim \textstyle\int_X f_n(x)d(\mu+\mu')(x) = \lim(\int_X f_n(x)d\mu(x) + \int_X f_n(x)d\mu'(x)) \\ &= \lim \textstyle\int_X f_n(x)d\mu(x) + \lim \int_X f_n(x)d\mu'(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X f(x)d\mu'(x)\end{aligned}$$

Similarmente se tiene, para $n \in \mathbb{N}$, que $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, donde $\int f_n d\mu = 0$, en el caso en que $\int f d\mu = 0$,

$$\begin{aligned}\textstyle\int_X f(x)d(a\mu)(x) &= \lim \textstyle\int_X f_n(x)d(a\mu)(x) = \lim a \int_X f_n(x)d\mu(x) = a \lim \int_X f_n(x)d\mu(x) \\ &= a \textstyle\int_X f(x)d\mu(x),\end{aligned}$$

(en el caso en que $a = 0$ o $\int f d\mu = 0$, se tiene $a \int f_n d\mu = 0$ para cada n).

Proposición 2.132 (Teorema trivial del cambio de variables)**.** Considere $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \mu')$ dos espacios de medida y una aplicación medible $\varphi: X \to Y$ compatible con las medidas, esto es, con $\mu[\varphi^{\leftarrow}(B)] = \mu'(B)$, para cada $B \in \mathcal{N}$. (Cf. la Definición 2.71), para cada aplicación medible $f: Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$, se tiene entonces, para la aplicación medible $f \circ \varphi: X \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_Y f(y)d\mu'(y) = \int_X f(\varphi(x)d\mu(x)$$

Prueba. Primer, en el caso en que la función f es simple, sea $(Y_i)_{i\in I}$ una familia finita de subconjuntos medibles de Y, disjuntos dos a dos de unión Y, tales que, para cada $y \in Y_i$, $f(y)$ tiene un valor contante $a_i \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Se tiene entonces que los conjuntos $\varphi^{\leftarrow}(Y_i) \in \mathcal{M}$ son disjuntos dos a dos y de unión X y la aplicación $f \circ \varphi$ toma el valor constante a_i en $\varphi^{\leftarrow}(Y_i)$ por lo que $f \circ \varphi$ también es una función simple y por definición,

$$\int_Y f(y)d\mu'(y) = \sum_{i\in I} a_i \mu'(Y_i) = \sum_{i\in I} a_i \mu(\varphi^{\leftarrow}(Y_i)) = \int_X f(\varphi(x))d\mu(x).$$

Para el caso general, en que $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$, sea una aplicación medible; se puede encontrar una sucesión creciente de funciones simples $f_n\colon Y \to \mathbb{R}_+$ con $f_n \to f(y)$, para cada $y \in Y$ y puesto que los $f_n \circ \varphi\colon X \to \mathbb{R}_+$ constituyen también una sucesión creciente de funciones simples con $f_n(\varphi(x)) \to f[\varphi(x)]$ para cada $x \in X$, se obtiene por el Teorema 2.111 (Convergencia monotóna)

$$\int_Y f(y)d\mu'(y) = \lim \int_Y f_n(y)d\mu'(y) = \lim \int_X f_n(\varphi(x))d\mu(x) = \int_X f(\varphi(x))d\mu(x)$$

2.6 Marco Conceptual

Se hizo un glosario con todos los conceptos que están interrelacionados con nuestro objeto de estudio; a saber,

1. **Longitud.** Se denomina longitud a la medida de un intervalo; es claro lo que es la longitud de un intervalo acotado cualesquiera, pues la longitud de un intervalo con extremos a y b es el número real $l(I) = b - a$. Con esto se mide intervalos y de entre éstos a los intervalos abiertos. La longitud de la unión de dos intervalos abiertos disjuntos y acotados $G = (a, b) \cup (c, d)$ donde $b < c$es el número real $l(G) = b - a + d - c$. Ahoa definición de intervalos abiertos en general. Para un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}$ se descompone de manera unica en una unión disjunta, a lo mas numerable ,de intervalos abiertos. Por lo tanto se define para cualquier conjunto abierto $G \leq \mathbb{R}$ la longitud de G como

$$l(G) = \sum_{n=1} l(j_n)$$

donde $G = \cup_{n=1} j_n$ es la descomposición (única)de G como unión de una colección disjunta, a lo mas numerable de intervalos abiertos. Una observación importante es que si G es un conjunto abierto acotado entonces $l(G) < \infty$ y por lo tanto la suma en la longitud es una suma absolutamente convergente.

2. **Función creciente.** Una la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente si $x < y$ entonces $f(x) \leq f(y)$ es estrictamente creciente si $x < y$, por lo tanto $f(x) < f(y)$

3. **Conjunto abierto.** El conjunto abierto, en topología y en diferentes ramas de las matemáticas, es un conjunto en el que cada uno de sus elementos tiene un entorno que incluye el mismo conjunto, de manera más intuitiva, ningún elemento de dicho conjunto pertenece también a la frontera de éste conjunto.

4. **Cardinalidad.** El número cardinal del conjunto A se llama cardinalidad de A en particular para cualquier conjunto A que es equipotente a $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ se escribe $\mathrm{Card}(A) = n$ Para cualquier conjunto A equipotente al conjunto de los números naturales, se escribe $A \approx \mathbb{N}$. También se escribe Card$(A) = \aleph_0$, llamado Alef, para cualquier $A \approx \mathbb{R}$, se escribe Card$(A) = \mathfrak{c}$, llamada *cardinalidad del continuo*.

5. **Conjuntos cerrados.** En topología, el conjunto A es cerrado, si el complemento de conjunto es abierto i.e. si existe G abierto tal que $X \setminus G = A$.

6. **Familia de conjuntos.** La familia de conjuntos o colección es una clase cuyos elementos son conjuntos.

7. **Topología Usual $\mathbb{R}^n$.** Sea I un conjunto finito no vacío y consideramos el conjunto $A\ p(I, \mathbb{R})$ de las aplicaciones $I \to \mathbb{R}$. Considerando las métricas euclideanas d_2 y el máximo d_∞ en este conjunto, aunque en general, definen espacios métricos diferentes,

éstas métricas definen la misma topología (la que generalmente se conoce como *topología canónica* o *topología usual*). En particular, en el caso en el que $I = \{1, \ldots, n\}$, $Ap(I, \mathbb{R})$ es el mismo que $\mathbb{R}^n$ y se habla de la topología canónica de $\mathbb{R}^n$.

Conclusión

En el presente apartado se estudiaron las medidas en σ-Álgebras de Borel y la integralde Lebesque, coneptos esenciales para el desarrollo del presente trabajo.

Capítulo 3

Espacios de Medida en la σ-Álgebra de los Borelianos

3.1 Cardinalidad de los Borelianos

En esta sección se establece la cardinalidad de la σ-álgebra de Borel que sirve de base en las jerarquías de Borel, se trabaja con el enfoque de [Rana, 2002] (Rana, Inder 2002 p.110). Lebesgue utilizó a los números ordinales para clasificar a los borelianos según su complejidad. Mas aún, utilizando esa jerarquía, es posible demostrar que existen $2^{\aleph_0}$ subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$. Históricamente Aleksandrov y Suslin demostraron la hipótesis del continuo es cierta para los conjuntos analíticos de Borel. Se trabaja con el enfoque de [Srivastava, 1998] (Srivastava, Sashi Mohan 2008 p.127) A continuaci'on, se extrae de [Asmat Medina, 2021] la siguiente

Definición 3.1. Un conjunto A se dice que es transitivo, si dado cualquier x tal que $x \in A$, se verifica $x \subset A$.

Ejemplo 3.2. A continuación, se presentan algunos ejemplos:

1. $\{1\}$ no es un conjunto transitivo, pues $1 \in \{1\}$ y en cambio 1 no es subconjuntos de $\{1\}$.

2. Trivialmente la clase universal es transitiva.

3. ω es un conjunto transitivo, pues si $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \in \omega$, entonces $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \subset \omega$.

Definición 3.3. Un conjunto es un *número ordinal* si él es vacío o es transitivo y bien ordenado bajo la relación de pertenencia $\in$. La idea de definir números ordinales es que $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$ y $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Denote los números ordinales con letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ La clase de todos los ordinales es denotada por Ord.

Teorema 3.4 (Principio del Mínimo Ordinal)**.** Sea $\mathcal{C}$ una clase no vacía de números ordinales, entonces existe $\alpha_0 \in \mathcal{C}$, tal que $\forall \beta \in \mathcal{C}, \alpha \leq \beta$.

Teorema 3.5 (Principio de Inducción Transfinita)**.** Sea $P(x)$ una propiedad (posiblemente con parámetros). Asuma que para todos los números ordinales α:

$$\text{Si } P(\beta) \text{ vale para todo } \beta < \alpha, \text{ entonces } P(\alpha) \text{ vale.} \tag{3.1}$$

Entonces $P(\alpha)$ vale para todos los ordinales α.

Prueba. Suponga que $P(\alpha)$ no vale para todos los ordinales α, es decir $\exists \alpha \in$ Ord tal que $P(\alpha)$ sea falso. Sea $\mathcal{C} = \{\beta \in \text{Ord} \mid P(\beta) \text{ sea Falso}\}$.

Note que que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pues $\alpha \in \mathcal{C}$. Por el principio del mínimo ordinal, existe $\alpha_0 \in \mathcal{C}$, tal que para todo $\beta \in \mathcal{C},\ \alpha_0 \leq \beta$.

Se muestra que para todo $x < \alpha_0,\ P(x)$ es verdadero pues $x \notin \mathcal{C}$. Por hipótesis se tiene lo siguiente: $P(\alpha_0)$ es verdadero y como $\alpha_0 \in \mathcal{C} \Rightarrow P(\alpha_0)$ es falso (Absurdo). Contradice por haber supuesto que existe un ordinal para el cual la propiedad sea falsa. Luego debe ser que $P(\alpha_0)$ es verdadero para todo $\alpha \in$ Ord.

Teorema 3.6. Sea ω_1 definido por $\omega_1 = \{\alpha \mid \alpha$ es un ordinal numerable$\}$. Entonces ω_1 es el menor ordinal no numerable.

ω_1 tiene las siguientes propiedades:

1. ω_1 es el primer ordinal no numerable.

2. Para cada $\alpha \in \omega_1$, el conjunto $\{\beta \in \omega_1 \mid \beta < \alpha\}$ es numerable.

3. Como ω_1 es bien ordenado, se puede aplicar el método de recursión transfinita sobre él.

4. Si el conjunto $A = \{a_n \mid n \in \omega\}$ es un subconjunto numerable de ω_1, se tiene que existe $\sup A = \cup A$ y además, $\sup A \in \omega_1$.

Definición 3.7. Dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad (número cardinal o simplemente cardinal) y se escribe $A \approx B$, si existe una biyección $f\colon A \to B$.

Definición 3.8. El ordinal mínimo que sea biyectivo a A, se llama cardinalidad de A y se denota por $|A|$, esto es $|A| = \min\{\alpha \mid \alpha \text{ es ordinal y } A \approx \alpha\}$

Notación 3. Se define al número $\aleph_0$ como cardinal del conjunto de los números infinitos numerables, también conocido como cardinalidad del conjunto de los números naturales, es decir $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

Notación 4. Al número $\mathfrak{c}$ se llama *cardinal de números reales*, también conocido *cardinalidad del continuo*, esto es $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$. Existen algunas propiedades importantes como lo refiere [Miller, 1981] "todo conjunto de números reales tiene de cardinalidad menor o igual a la del continuo, tiene medida cero".

Lema 3.9. 1. Sea $\mathcal{I}_r$ denota la clase de todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ con extremos racionales, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{I}_r) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

2. Sea $\mathcal{I}_d$ denota la clase de todos los intervalos de $[0,1]$ con extremos diádicos (i.e; puntos de la forma $m/2^n$ para algunos enteros m y n), muestre que $\mathcal{M}(\mathcal{I}_d) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cap [0,1]$.

El correspondiente resultado para σ-Álgebras es el siguiente: Para cualquier familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, sea

$$\mathcal{C}^* := \{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \mid \forall i, \text{o } E_i \in \mathcal{C} \text{ o } E_i^c \in \mathcal{C}\}.$$

Denote Ω el primer número ordinal no contable. Sea $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C} \cup \{X\}$ y sea α cualquier número ordinal, $0 < \alpha < \Omega$. Use inducción transfinita para definir $\mathcal{C}_\alpha$ como sigue: Suponga para cada $\beta < \alpha$, $\mathcal{C}_\beta$ ha sido definida. Defina

$$\mathcal{C}_\alpha := \Big(\bigcup_{0 \leq \beta < \alpha} \mathcal{C}_\beta \Big)^*.$$

Entonces se tiene el siguiente

Teorema 3.10. Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X y para cada cada número ordinal $\alpha \in [0, \Omega[$, sea $\mathcal{C}_\alpha$ definido anteriormente. Entonces $\mathcal{S} := \bigcup_{0 \leq \alpha < \Omega} \mathcal{C}_\alpha$ es una σ-Álgebra de subconjuntos de X. De hecho, $\mathcal{S} = \mathcal{M}(\mathcal{C})$, la σ-Álgebra generada por $\mathcal{C}$.

Prueba. Claramente, si $\alpha < \beta < \Omega$, entonces $\mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{C}_\alpha^* \subset \mathcal{C}_\beta$ y para que $A \in \mathcal{C}_\alpha$ y por lo tanto, $A^c \in \mathcal{C}_\alpha^*$, para cada $\beta > \alpha$. Así $A \in \mathcal{S}$ implicaría que $A^c \in \mathcal{S}$. Ahora sea $A_i \in \mathcal{C}$, para $i = 1, 2, \ldots$ Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in (\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_{\alpha_i})^* \subset \mathcal{C}_\beta$$

para cada β tal que $\beta > \alpha_n$. Para cada n. Por tanto $A_i \in \mathcal{S},\ i = 1, 2, \ldots$, implicaría que, $\bigcup_{i=1} A_i \in \mathcal{S}$. Finalmente, $\emptyset = X^c \in \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{S}$ y por tanto $X \in \mathcal{S}$. Esto prueba que $\mathcal{S}$ es una σ-Álgebra. Sea $\mathcal{B}$ cualquier σ-Álgebra de subconjuntos de X tal que $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$. Entonces claramente $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}_0^*$. Además, si $\mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{C}_\alpha^* \subset \mathcal{B}$ y por tanto $\mathcal{B}_\beta \subset \mathcal{B}$ para cada $\beta < \Omega$. Así $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$, mostrando que $\mathcal{S} = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Corolario 3.11. La σ-Álgebra $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ de borel subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene la cardinalidad $\mathfrak{c}$ del continuo.

Prueba. Puesto que cada singulete $\{x\}$ es un conjunto cerrado, $\{x\} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Así $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ tiene cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$. Por otro lado, denótese por $\mathcal{C} = \{]a, b[\subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ la clase de los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ con extremos racionales. Por el Lema 3.9, $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

Por el Teorema 3.10,

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcup_{0 \leq \beta < \Omega} \mathcal{C}_\beta.$$

Note que $\mathcal{C}_0$ tiene un número contable e infinito de elementos y para construir un elemento de $\mathcal{C}_0$ se tiene que elegir $\aleph_0$ elementos, cada elemento teniendo dos alternativas, o está en $\mathcal{C}_0$ o está en su complemento. Por lo tanto $\mathcal{C}_0^* = \mathcal{C}_1$ tendrá a los más $2^{\aleph_0}$ elementos. Ahora asuma que cada $\mathcal{C}_\alpha$ tenga cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. Ahora asuma que cada $\mathcal{C}_\alpha$ tenga cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ para $\alpha < \beta$. Entonces

$$\mathcal{C}_\beta = (\bigcup_{1 \leq \alpha < \beta} \mathcal{C}_\alpha)^*.$$

Claramente, $\{\alpha \mid \alpha < \beta\}$ tiene cardinalidad a lo más $\aleph_0$ y por tanto $(\bigcup_{1 \leq \alpha < \beta} \mathcal{C}_\alpha)^*$ tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{c}$. Así , $\mathcal{C}_\beta$ tendrá cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. Por inducción transfinita, cada $\mathcal{C}_\beta$, con $\beta < \Omega$, tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. Por tanto $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcup_{1 \leq \beta < \Omega} \mathcal{C}_\beta$ tendrá cardinalidad a lo más $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, probando que $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ tiene cardinalidad exactamente $\mathfrak{c}$ elementos.

Escolio 3.12. Recuérdese que $|\mathcal{B}_{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}|$, por lo tanto si $\mathcal{F}$ denota la familia de los conjuntos de Borel de medida cero, se tiene que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{B}_{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}|$. Por otra parte, $\mathbb{Q}$ es un Boreliano de medida cero, entonces $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{F}$, luego $|\mathcal{F}| = |\mathbb{R}|$.

3.2 Medida de Lebesgue en Dimensiones Superiores

Definición 3.13 (Intervalos semiabiertos en $\mathbb{R}^n$)**.** Sea un número natural $n \geq 1$, se llama *intervalo semiabierto de* $\mathbb{R}^n$ a cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que tiene la forma

$$A =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n], \tag{3.2}$$

donde, para cada $1 \leq j \leq n,\ a_j \leq b_j$, son números reales.

En el caso $n = 1$, los intervalos semiabiertos de $\mathbb{R}$ son exactamente los $\mathbb{R}$-intervalos semiabiertos establecidos en la Definición 2.36. Y cuando un intervalo semiabierto A es no vacío, los elementos a_j y b_j en la representación (3.2) están unívocamente determinados por A y verifican $a_j < b_j$, ya que $]a_j, b_j]$ es necesariamente la imagen directa de A por la proyección canónica $\pi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \pi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_j$; pero el conjunto vacío $\emptyset$ es un intervalo semiabierto que admite infinitas representaciones del tipo (3.2) a saber todas aquellas en que, para algún j, $a_j = b_j$.

Proposición 3.14 (Los intervalos semiabiertos como semianillos)**.** Dado un $n \geq 1$, la clase $\mathcal{S}_n$ de los intervalos de $\mathbb{R}^n$ es un semianillo cuya σ-Álgebra generada es la σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de los borelianos de $\mathbb{R}^n$.

Prueba. El caso en que $n = 1$ es ya conocido (Proposición 2.37 y la Proposición 2.48). Supónga el resultado válido para un cierto $n \geq 1$. Ya que $\mathbb{R}^n$ es la unión de familia contable de conjuntos $]-p,p]^n$, con $p \in \mathbb{N}$, se deduce de la Proposición 2.79 y Proposición 2.83 que la clase $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}$ de los productos $A \times]a_{n+1}, b_{n+1}]$, con $A \in \mathcal{S}_n$ y $a_{n+1} \leq b_{n+1}$, es un semianillo de partes de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, cuya σ-Álgebra generada es $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; es decir, teniendo en cuenta la Proposición 2.85, es una σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}$ de los borelianos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Considere el homeomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$, definido por

$$\varphi((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}),$$

se deduce de la Proposición 2.78 y la Proposición2.76 que $\mathcal{S}_{n+1}$ conincide con $\varphi_*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S})$ y es un semianillo de partes de $\mathbb{R}^{n+1}$, cuya σ-Álgebra generada es $\varphi_*(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ o sea teniendo en cuenta el Corolario 2.70, es la σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ de los borelianos de $\mathbb{R}^{n+1}$. El resultado queda así demostrado por inducción.

Teorema 3.15 (La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$)**.** Sea $n \geq 1$, existe una y sólo una medida λ_n en la σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de los borelianos de $\mathbb{R}^n$ tal que, para cada

$$A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n] \in \mathcal{S}_{n+1}$$

(donde $a_j \leq b_j$), se tenga

$$\lambda_n(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n).$$

Esta medida, la que se llama medida de Lebesgue de los borelianos en $\mathbb{R}^n$, es σ-finita y coincide, en el caso en que $n = 1$, con la medida de Lebesgue λ de los borelianos de $\mathbb{R}$, caracterizada en la Definición 2.46 y en el caso en que $n = 2$, con la medida producto $\lambda \otimes \lambda$.

Prueba. Se demuestra por inducción sobre n. Para el caso base $n = 1$, es conocido, puesto que la medida de Lebesgue λ de los borelianos de $\mathbb{R}$ es la única que verifica la condición

$\lambda(]a,b]) = b-a$, siempre que $a \leq b$. Suponga el resultado verdadero para un cierto $n \geq 1$. Se puede entonces considerar la medida producto $\lambda_n \otimes \lambda$ en la σ-Álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}$ (Cf. Proposición 2.85) y tomar para λ_{n+1} la medida imagen directa $\varphi * (\lambda_n \otimes \lambda)$, en la σ-Álgebra de los borelianos de $\mathbb{R}^{n+1}$ (Cf. Proposición 2.73), donde $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ es el homeomorfismo definido por

$$\varphi((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}),$$

medida para la cual se tiene, para cada

$$A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n] \in \mathcal{S}_{n+1}$$

(donde $a_j \leq b_j$),

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}(A) &= (\lambda_n \otimes \lambda)(\varphi^{-1}(A))\\ &= (\lambda_n \otimes \lambda)(]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n]) \times (]a_{n+1}, b_{n+1}])\\ &= \lambda_n(]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n]) \times \lambda(]a_{n+1}, b_{n+1}])\\ &= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_{n+1} - a_{n+1}).\end{aligned}$$

Esta medida es σ-finita, que tiene restricción σ-finita al semianillo $\mathcal{S}_{n+1}$. Ya que $\mathbb{R}^{n+1}$ es unión de una familia contable de los conjuntos

$$]-p,p]^{n+1} \in \mathcal{S}_{n+1}, \text{ con } \lambda_{n+1}(]-p,p]^{n+1}) = (2p)^{n+1} < +\infty.$$

La unicidad de la medida λ_{n+1} en las condiciones del enunciado es una consecuencia del teorema de Hahn en el Teorema 2.60. Una vez que, para la medida producto $\lambda \otimes \lambda$, también se tiene que

$$\lambda \otimes \lambda(]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]) = \lambda(]a_1, b_1] \times \lambda]a_2, b_2] = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2),$$

se concluye que $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$

Proposición 3.16. La medida de Lebesgue de los borelianos en $\mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades:

1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un boreliano acotado, entonces $\lambda_n(A) < +\infty$.

2. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un boreliano con $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, entonces $\lambda_n(A) > 0$.

Prueba. De la hipótesis de 1, se puede considerar $R > 0$, tal que $A \subset]-R, R]^n$ por lo que se tiene

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_n(]-R, R]^n) = (2R)^n < +\infty.$$

De la hipótesis de 2, siendo $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \operatorname{int} A$, se puede considerar $\varepsilon > 0$, tal que

$$]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times]a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon] \times \cdots \times]a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon] \subset A$$

y entonces

$$0 < (2\varepsilon)^n = \lambda_n(]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times]a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon] \times \cdots \times]a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon]) \leq \lambda_n(A).$$

Proposición 3.17 (Algunos homeomorfismos compatibles con las medidas)**.** Se tiene

1. Para cada $1 \leq j \leq n$, se tiene un homeomorfismo $\psi_j \colon \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por

$$\psi_j((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x, x_j, \ldots, x_n),$$

el cual es compatible con las medidas, cuando en el dominio se considera la medida $\lambda_{n-1} \otimes \lambda$ y no en el espacio de llegada la medida λ_n (en ambos los casos en las σ-Álgebras de los borelianos).

2. Para cada $1 \leq m \leq n$, se tiene un homeomorfismo $\theta_m\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, definido por

$$\theta_m((x_1, x_2, \ldots, x_m), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

el cual es compatible con las medidas, cuando en el dominio se considera la medida $\lambda_m \otimes \lambda_{n-m}$ y en el espacio de llegada la medida λ_n (en ambos los casos de las σ-Álgebra de los borelianos).

Prueba.

1. Se tiene que mostrar que la imagen de la medida directa $\psi_{j*}(\lambda_{n-1} \otimes \lambda)$ coincide con la medida λ_n y eso resulta de la caracterización definida en el Teorema 3.15, ya que se tiene

$\psi_{j*}(\lambda_{n-1} \otimes \lambda)(]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n])$

$= \lambda_{n-1} \otimes \lambda((]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_{j-1}, b_{j-1}] \times]a_{j+1}, b_{j+1}] \times]a_n, b_n]) \times]a_j, b_j])$

$= \lambda_{n-1}(]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_{j-1}, b_{j-1}] \times]a_{j+1}, b_{j+1}] \times]a_n, b_n]) \times \lambda]a_j, b_j])$

$= (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n).$

2. Se tiene que demostrar que la medida imagen directa $\theta_{m*}(\lambda_m \otimes \lambda_{n-m})$ coincide con la medida λ_n y eso resulta de la caracterización en el Teorema 3.15, ya que se tiene

$\theta_{m*}(\lambda_m \otimes \lambda_{n-m})(]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n])$

$= \lambda_m \otimes \lambda_{n-m}((]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_m, b_m]) \times (]a_{m+1}, b_{m+1}] \times]a_n, b_n]))$

$= (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n).$

Corolario 3.18. Si para $1 \leq j \leq n$, $A_j \subset \mathbb{R}$ es un boreliano, entonces también lo es el conjunto $A_1 \times A_2 \times \cdots A_n \subset \mathbb{R}^n$ y además

$$\lambda_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \lambda(A_1) \cdot \cdots \cdot \lambda(A_n).$$

En particular, se tiene tal como se sabía en el caso en que $n = 1,\ \lambda_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ y para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n(\{x\}) = \lambda_n(\{x_1\} \times \cdots \times \{x_n\}) = 0.$$

Prueba. Por principio de inducción sobre n, Para el caso $n = 1$ es trivial. Suponiendo verdadero el resultado para el caso n y tomando, para cada $1 \leq j \leq n+1$, un boreliano $A_j \subset \mathbb{R}$ la hipótesis inductiva garantiza que $A_1 \times \cdots \times A_n$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$ con

$$\lambda_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \lambda(A_1) \cdot \cdots \cdot \lambda(A_n)$$

por lo que $(A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con

$$(\lambda_n \otimes \lambda)((A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}) = \lambda(A_1) \cdot \cdots \cdot \lambda(A_n) \cdot \lambda(A_{n+1})$$

y se deduce entonces de la línea 1. del resultado anterior, con $j = n+1$, que $A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}$ es un boreliano de $\mathbb{R}^{n+1}$ con

$$\lambda_{n+1}(A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}) = \lambda(A_1) \cdot \cdots \cdot \lambda(A_n) \cdot \lambda(A_{n+1})$$

lo cual se demuestra la prueba por inducción.

Proposición 3.19 (Invarianza por traslación)**.** La medida de Lebesgue λ_n en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, es invariante por traslación, esto es, para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tiene una aplicación bimedible $\tau_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \tau_x(y) = x + y$, que es compatible con la medida de Lebesgue λ_n (o sea, λ_n es τ_x-invariante, para cada x).

Prueba. La afirmación de ser τ_x medible, resulta del hecho de tratarse de un homeomorfismo con inverso τ_{-x}. Se tiene que mostrar es que la imagen directa $\tau_{x*}\lambda_n$ coincide con la medida

λ_n y eso resulta de la afirmación de unicidad en la definición de λ_n, ya que siendo

$$A =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n] \in \mathcal{S}_n$$

(donde $a_j \leq b_j$), se tiene

$\tau_{x*}\lambda_n(A) = \lambda_n(-x + A) = \lambda_n(]a_1 - x_1, b_1 - x_1] \times \cdots \times]a_n - x_n, b_n - x_n])$

$= ((b_1 - x_1) - (a_1 - x_1)) \cdots ((b_n - x_n) - (a_n - x_n)) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \lambda_n(A)$

Proposición 3.20 (Otra caracterización de la medida de Lebesgue)**.** La medida de Lebesgue λ_n en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, es la única medida μ de esta σ-Álgebra que es invariante por traslación y verifica que $\mu(]0, 1]^n) = 1$.

Prueba. Se probó anteriormente que λ_n es invariante por traslación y por definición, se verifica $\mu(]0, 1]^n) = 1^n = 1$. Suponga ahora que $\mu\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una medida cualesquiera invariante bajo traslación, tal que $\mu(]0, 1]^n) = 1$. Se va a demostrar que $\mu = \lambda_n$ dividiendo esa prueba en cuatro partes:

Parte 1 Se comienza por demostrar que, si $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\Big]0, \frac{1}{q_1}\Big] \times \Big]0, \frac{1}{q_2}\Big] \cdots \times \Big]0, \frac{1}{q_n}\Big]\Big) = \frac{1}{q_1} \cdot \frac{1}{q_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{q_n}$$

El conjunto $]0, 1]^n$, donde la medida μ toma el valor de 1, es la unión disjunta de los $q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_n$ subconjuntos del tipo

$$\Big]\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1 + 1}{q_1}\Big] \times \Big]\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_2 + 1}{q_2}\Big] \times \cdots \times \Big]\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + 1}{q_n}\Big]$$

con enteros $p_1, p_2, \ldots, p_n$ verificando $0 \leq p_j \leq q_j - 1, \forall j = 1, \ldots, n$; tales subconjuntos son todos traslaciónes de los conjuntos $]0, \frac{1}{q_1}] \times]0, \frac{1}{q_2}] \times \cdots \times]0, \frac{1}{q_n}])$ y por lo tanto son medidos por μ con el mismo valor.

Parte 2 En general, Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son racionales estrictamente positivos, entonces

$$\mu(]0, r_1] \times]0, r_2] \times \cdots \times]0, r_n]) = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n.$$

Si $r_j = p_j/q_j$, con $q_j \in \mathbb{N}$ y $p_j \geq 0$ en $\mathbb{Z}$ basta notar que $]0, r_1] \times]0, r_2] \times \cdots \times]0, r_n]$ es unión disjunta de los $p_1 \ldots p_2 \ldots \cdots \ldots p_n$ conjuntos

$$\left]\frac{k_1}{q_1}, \frac{k_1+1}{q_1}\right] \times \left]\frac{k_2}{q_2}, \frac{k_2+1}{q_2}\right] \times \cdots \times \left]\frac{k_n}{q_n}, \frac{k_n+1}{q_n}\right]$$

con los enteros $k_1, k_2, \ldots, k_n$ verifica $0 \leq k_j \leq p_j - 1$, esos conjuntos que todos son traslaciones de conjunto $]0, \frac{1}{q_1}] \times]0, \frac{1}{q_2}] \times \cdots \times]0, \frac{1}{q_n}]$ y por tanto son medidos por μ con el mismo valor $\frac{1}{q_1} \cdot \frac{1}{q_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{q_n}$.

Parte 3 Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son reales estrictamente positivos, entonces

$$\mu(]0, r_1] \times]0, r_2] \times \ldots \times]0, r_n]) = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n.$$

Para cada $1 \leq j \leq n$, considere una sucesión de números racionales estrictamente positivos $(s_{j,p})_{p \in \mathbb{N}}$, decreciente convergiendo para r_j, siendo para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$A_p =]0, s_{1,p}] \times]0, s_{2,p}] \times \ldots \times]0, s_{n,p}],$$

se tiene $A_{p+1} \subset A_p$ y por lo que se vió en el caso estudiado en 2),

$$\mu(A_p) = s_{1,p} \cdot s_{2,p} \cdot \cdots \cdot s_{n,p} \to r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_p,$$

en particular $\mu(A_1) < +\infty$ ya vez que

$$\bigcap_p A_p =]0, r_1] \times]0, r_2] \times \cdots \times]0, r_n]$$

la igualdad es una consecuencia de la línea 7) de la Proposición 2.31.

Parte 4 Para todo

$$]a_1,b_1]\times]a_2,b_2]\times\cdots\times]a_n,b_n]\in\mathcal{S}_n$$

(donde $a_j\leq b_j$), se tiene

$$\mu(A)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\cdots\cdot(b_n-a_n),$$

y consecuentemente, teniendo en cuenta la definición de λ_n en el Teorema 3.15, $\mu=\lambda_n$. En efecto, si existe j tal que $a_j=b_j$, la igualdad resulta de tener $A=\emptyset$. Caso contrario, tenemos una consecuencia de lo que se vio en 3), ya que se tiene

$$A=(a_1,\ldots,a_n)+]0,b_1-a_1]\times]0,b_2-a_2]\times\cdots\times]0,b_n-a_n].$$

Corolario 3.21. Sea μ definida en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, de los borelianos de $\mathbb{R}^n$, invariante por traslación y que $\mu(A)<\infty$, para cada boreliano acotado A. Se tiene entonces $\mu=c\lambda_n$, para un cierto $0\leq c<+\infty$ a saber que $c=\mu(]0,1]^n)$.

Prueba. Sea $c=\mu(]0,1]^n)$. Si $c=0$ el hecho de $\mathbb{R}^n$ sea reunión de una familia enumerable de los conjuntos de la forma

$$]p_1,p_1+1]\times\cdots\times]p_n,p_n+1],$$

con los p_j números enteros, conjuntos aquellos que son todos traslaciones de $]0,1]^n$, implica que $\mu(\mathbb{R}^n)=0$, y por tanto que la medida μ es idénticamente nula. Si $c>0$, se puede considerar la medida $\frac{1}{c}\mu$, que es invariante por traslación y toma el valor 1 en $]0,1]^n$, se tiene así, por la Proposición 3.20, $\frac{1}{c}\mu=\lambda_n$, por tanto $\mu=c\lambda_n$.

3.3 σ-Álgebra Producto Generalizado

Una segunda familia surge de productos cartesianos, ésta es la construcción para una familia arbitraria de espacios medibles.

Definición 3.22 (σ-Álgebra Producto)**.** Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia indizada de conjuntos no vacíos,

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

y $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ la aplicación proyección; esto es, $\pi_\alpha((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = x_\alpha$. Si $\mathcal{M}_\alpha$ es una σ-Álgebra en X_α, para cada $alpha$, entonces defínase la *σ-Álgebra producto* en X siendo la σ-Álgebra generada por

$$\{\pi_\alpha^{\leftarrow}(E_\alpha) \mid E_\alpha \in \mathcal{M},\ \alpha \in A\}$$

que será denotada por $\bigotimes\limits_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$.

En el caso de productos enumerables la σ-Álgebra producto tiene una caracterización más simple e intuitiva:

Proposición 3.23. $\bigotimes\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i$ es la σ-Álgebra generada por $\{\Pi_{i \in \mathbb{N}} E_i \mid E_i \in \mathcal{M}_i\}$.

Prueba. Sea $E_i \in \mathcal{M}_i$, entonces

$$\pi_i^{\leftarrow}(E_i) = \prod_{j \in J} E_j,$$

donde

$$E_j = \begin{cases} E_i, & \text{si } j = i \\ X_j, & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Por tanto, como $X_i \in \mathcal{M}_i \forall i \in J$ (Definición 2.17 parte 2), se tiene que

$$\{\pi_i^{\leftarrow}(E_i) \mid E_i \in \mathcal{M}_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \Big\{\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i \mid E_i \in \mathcal{M}_i\Big\}$$

donde por la segunda afirmación del Lema 2.22,

$$\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}\Big(\{\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i \mid E_i \in \mathcal{M}_i\}\Big). \tag{3.3}$$

Se tiene también en particular que

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi^{\leftarrow}(E_i),$$

luego

$$\Big\{\prod_{i\in\mathbb{N}} \mid E_i \in \mathcal{M}_i\Big\} \subset \mathcal{M}(\{\pi_i^{\leftarrow}(E_i) \mid E_i \in \mathcal{M}_i, i \in \mathbb{N}\}) = \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i$$

se sigue de la primera afirmación del Lema 2.22 que

$$\mathcal{M}\Big(\Big\{\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i \mid E_i \in \mathcal{M}_i\Big\}\Big) \subset \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i. \tag{3.4}$$

De (3.3) y (3.4), se tiene que

$$\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}\Big(\Big\{\prod_{i\in N} E_i \mid E_i \in \mathcal{M}_i\Big\}\Big).$$

Lema 3.24. Sean $\mathcal{M}_j = \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$. Entonces $\bigotimes\limits_{j\in J} \mathcal{M}_j = \mathcal{M}(\{\pi_j^{\leftarrow}(E_j) \mid E_j \in \mathcal{E}_j, j \in J\})$. En el caso enumerable, se tiene, $\bigotimes\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}(\{\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \mathbb{N}\})$.

Prueba. Por definición de σ-Álgebra de Borel se tiene que, $\bigotimes\limits_{j\in J} \mathcal{M}_j = \mathcal{M}(\{\pi_j^{\leftarrow}(E_j) \mid E_j \in \mathcal{E}_j, j \in J\} \subset \bigotimes\limits_{j\in J} \mathcal{M}_j$. Por otro lado, para cada $j \in J$, el conjunto

$$\{E \subset X_j \mid E_j \in \mathcal{M}(\{\pi_j^{\leftarrow}(E_j), j \in J\})\}$$

es una σ-Álgebra en X_j que contiene $\mathcal{E}_j$ y por tanto $\mathcal{M}_j$. En otras palabras, $\pi_j^{\leftarrow}(E) \in \mathcal{M}(\{\pi_j^{\leftarrow}(E_j) \mid E_j \in \mathcal{E}_j, j \in J\})$, para todo $E \subset \mathcal{M}_j$, luego $\bigotimes\limits_{j\in J} \mathcal{M} \subset \{\pi_j^{\leftarrow}(E_j) \mid E_j \in \mathcal{E}_j, j \in J\}$.

La segunda afirmación se sigue de la primera en la demostración de la proposición anterior.

Definición 3.25 (Espacio Separable)**.** Un espacio topológico X es *separable* si contiene un subconjunto enumerable denso en X.

Teorema 3.26. Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios métricos y $X = \prod_{i\in\mathbb{N}}^n X_i$ dotado con la métrica producto. Entonces $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$. Si $X_1, \ldots, X_n$ son separables, entonces $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{B}_X$.

Prueba. Por la primera afirmación del lema anterior,

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{M}(\{\pi_i^{\leftarrow}(U_i) \mid U_i \text{ es abierto en } X_i, i = 1, \ldots, n\}).$$

Como en la topología producto $\pi_i^{\leftarrow}(U_i)$ es un abierto en X, se sigue del Lema 2.22 que $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{x_i} \subset \mathcal{B}_X$.

Asuma que $X_1, \ldots, X_n$ son separables. Sea $\{x_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un subconjunto enumerable denso en X_j para $E_j \in \mathcal{E}_j$, la colección enumerable de bolas centradas en x_j^k con radios racionales. Por tanto, todo conjunto abierto en X_j puede ser escrito como una unión enumerable de elementos de $\mathcal{E}_j$, luego

$$\mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{M}(\mathcal{E}_j).$$

Además de eso, el conjunto de puntos en X cuyas coordenadas están entre los x_j^k es un subconjunto enumerable denso en X y las bolas de radio r en X son productos de bola de radio r en los X_j, luego

$$\mathcal{B}_X = \mathcal{M}\Big(\Big\{\prod_{i=j}^{n} E_j \mid e_j \in \mathcal{E}_j\Big\}\Big).$$

Se sigue de la segunda afirmación del lema anterior que $\mathcal{B}_X = \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) = \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{X_j}$.

Corolario 3.27. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Prueba. Como $\mathbb{Q}$ es subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$, además $\mathbb{Q}$ es enumerable y denso en $\mathbb{R}$ implica que este último es separable y por el Teorema 3.26 anterior se concluye la demostración de este resultado.

3.4 Medidas de Radon en Localmente Compactos

Definición 3.28 (Caracterización por los sistemas fundamentales de vecindades)**.** Sea X un espacio topológico, $A \subset X$, $a \in X$ y V_a un *Sistema fundamental de vecindades* de a (por ejemplo, la clase de todas las vecindades de a) recuérdese puntos adherentes: a es adherente a A si y sólo si, para cada $W \in B_a$; entonces $W \cap A \neq \emptyset$. Utilizando este hecho, se obtiene a partir de definiciones topológicas, las siguientes caracterizaciones:

1. El punto a es interior a A, si y sólo si, existe $W \in B_a$, tal que tal que $W \cap (X \setminus A) = \emptyset$. En otras palabras si, y sólo si $W \in B_a$ tal que $W \subset A$. En particular y recordando la definición de sistema fundamental de vecindades, podemos decir que a es interior en A, si y sólo si,A es una vecindad de a.

2. El punto a es exterior en A, si y sólo si, existe $W \in B_a$ tal que $W \cap A = \emptyset$ en otras palabras, si y sólo si, existe $W \in B_a$ tal que $W \subset A \setminus A$.

3. El punto a es frontera en A si y sólo si, cualquiera que sea $W \in B_a$ entonces $W \cap A \neq \emptyset$ y $W \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Definición 3.29. Un espacio topológico Y se llama *Localmente compacto* si para cada $y_0 \in Y$. Existe un sistema fundamental de vecindades V_{y_0} de y_0, constituido por subconjuntos compactos compactos o, lo que es lo mismo, si para cada $y_0 \in Y$, el conjunto de las vecindades compactas de y_0, constituye un sistema fundamental de vecindades de ese punto.

Definición 3.30. Considere un espacio topológico localmente compacto separado X, de base contable y sea la σ-Álgebra de los borelianos en X, $\mathcal{B}_X$. Se llama *Medida de Radon* sobre X a la medida $\mu\colon \mathcal{B}_X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que $\mu(K) < +\infty$, para cada compacto $K \subset X$.[1]

Proposición 3.31. Dado un espacio topológico localmente compacto X, separado y de base contable y considere $\mathcal{B}_X$ la σ-Álgebra de los borelianos de X, existe una vecindad V de x con $\mu(V) < +\infty$ (condición que se acostumbra expresar diciendo que μ es una *medida localmente finita*).

Prueba. Toda medida de Radon es localmente finita, ya que para cada $x \in X$ se puede considerar una vecindad compacta V de x, la cual va por tanto verificar la condición $\mu(V) < +\infty$. Suponga recíprocamente, que la medida μ es localmente finita y considere un compacto $K \subset X$ arbitrario. Para cada $x \in K$, existe una vecindad V_x de x con $\mu(V_x) < +\infty$. Ya que la familia de los interiores $\operatorname{int} V_x$ constituye una cobertura abierta de K, la propiedad de las coberturas de los compactos implica la existencia de una parte finita J de K tal que esté

[1] Algunos autores como [Halmos, 2013], usan en vez de "Medida de Radon" la denominación "Medida de Borel". Note que la definición de medida de Radon podría haber sido dada sin la exigencia que el espacio tenga una base contable, pero esa exigencia es importante para la mayoría de resultados que se establecen.

contenida en la unión de $\operatorname{int}(V_x)$ con $x \in J$, en particular $K \subset \bigcup_{x \in J} V_x$, lo que implica

$$\mu(K) \leq \sum_{x \in J} \mu(V_x) < +\infty.$$

Queda probado que μ es una medida de Radon.

Escolio 3.32.

1. La medida de Lebesgue λ_n en los borelianos de $\mathbb{R}^n$, para n fijo, es una medida de Radon, ya que los compactos son acotados. Del mismo modo las medidas de Lebesgue-Stieltjes λ_g, en los borelianos de un intervalo abierto no vacío J, son medidas de Radon, ya que cualquier compacto contenido en J está contenido en un intervalo semiabierto con extremos en J.

2. Si X es un conjunto contable, sobre el cual se considera la topología discreta, X es un espacio topológico localmente compacto, separado de base contable, la σ-Álgebra de los borelianos está constituida por todos los subconjuntos de X y la medida de conteo ν es una medida de Radon sobre X (ya que los conjuntos compactos son finitos).

En general, si $\mu: \mathcal{B}_X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una medida de Radon sobre el espacio topológico localmente compacto, separado y de base contable X y si $Y \subset X$ es subconjunto abierto o cerrado de X, entonces Y con la topología inducida es también un espacio topológico localmente compacto, separado y de base contable y la restricción de μ a la σ-Álgebra $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_{X|Y}$ de los borelianos de Y es una medida de Radon sobre Y.

Conclusión

En el presente apartado se observó algunos de los conceptos más generales como la teoría axiomática de conjuntos, la medida de Lebesque en dimensiones superiores, la σ-Álgebra producto generalizado y la medida de Radon en conjuntos localmente compactos.

Conclusiones

1. Construyase los espacios de medida sobre la σ-álgebra de los borelianos con aplicaciones definidas en cualquier σ-Álgebra de Borel con valores en la σ-álgebra de los borelianos en $\mathbb{R}$.

2. Existen dos construcciones para determinar el cardinal de los borelianos es en $\mathbb{R}$, ambos determinan que su cardinal es de orden $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, es decir existen tantos conjuntos de Borel como números reales en la recta.

3. Existen otras medidas importantes como son la medida de Lebesgue y respecto a ella los conjuntos medibles según Lebesgue, ellos son comparables con los borelianos en $\mathbb{R}$ y que son mayores en cardinal. También existe la medida de Radon, que tiene vínculos con el análisis y los grupos topológicos.

4. Se puede establecer la σ-álgebra producto de borelianos construyendo la familia que genera esta σ-Álgebra, que es la familia de las imágenes inversas de conjuntos de Borel mediante las aplicaciones proyección, el caso más importante es aquel en la que se toma como espacio topológico a los espacios métricos dotados de una distancia y el caso importante los borelianos en $\mathbb{R}^n$.

Recomendaciones y Sugerencias

1. Determínese la cardinalidad de la σ-álgebra de los conjuntos medibles según Lebesgue.

2. Estúdiese las medidas de Radon en relación con la medida de Haar y hacer una clasificación de medidas generales existentes.

3. Estúdiese Los conjuntos analíticos son imagenes continuas de borelianos y las jerarquías de Borel, que involucran espacios separables en su caracterización y establezca dicha clasificación.

4. Estúdiese la medida en Haar y otras como la medida de Wiener, con aplicaciones a la probabilidad, medida de Itô entre otros y sus aplicaciones, para futuras investigaciones en distintas disciplinas como la teoría de la medida y probabilidad, análisis armónico, grupos continuos, entre otros.

Bibliografía

[Asmat Medina, 2021] Asmat Medina, G. A. (2021). Un espacio topolgico no productivamente baire asumiendo la hipótesis del continuo.

[Fava and Zó, 2013] Fava, N. and Zó, F. (2013). *Medida e Integral de Lebesgue*. Fascículo 4: Cursos de Grado. Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.

[Figueroa Serrudo et al., 2018] Figueroa Serrudo, C., Fernandez Sánchez, P., and Rabanal, R. (2018). Guía de investigación en ciencias e ingeniería, matemáticas. https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/172161. Accesado el 04/01/2023.

[Folland, 2013] Folland, G. B. (2013). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley.

[Grabinsky, 2013] Grabinsky, G. (2013). *Teoría de la Medida*. UNAM, Facultad de Ciencias, II Título. Las prensas de Ciencias.

[Halmos, 2013] Halmos, P. R. (2013). *Measure theory*, volume 18. Springer.

[Hernández-Sampieri et al., 2018] Hernández-Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P., et al. (2018). *Metodología de la investigación*, volume 4. McGraw-Hill Interamericana México.

[Machaca Huancollo, 2018] Machaca Huancollo, W. (2018). Relaciones entre la integral de riemann y la integral de lebesgue.

[Machado, 2011] Machado, A. (2011). *Medida e Integração*. Universidade de Lisboa.

[Miller, 1981] Miller, A. W. (1981). Some properties of measure and category. *Transactions of the American Mathematical Society*, 266(1):93–114.

[Rana, 2002] Rana, I. K. (2002). *An introduction to measure and integration*, volume 45. American Mathematical Society.

[Srivastava, 1998] Srivastava, S. M. (1998). *A course on Borel sets*, volume 180. Springer Science & Business Media.

[Velosa et al., 2015] Velosa, L., Andrea, C., et al. (2015). Medida de haar.

Anexos

Matriz de consistencia

Formulación del problema	Objetivos	Variables	Metodología
Problema General ¿Como construir los espacios de medida sobre la σ-Álgebra de los borelianos?	**Objetivo General** Contruir los espacios de medida sobre la σ-Álgebra de los borelianos	**Variable Independiente** Espacios de medida	
Problemas específicos	**Objetivos específicos**	**Variable dependiente**	**Tipo de Investigación**
¿Cómo establecer la σ-Álgebra producto de los borelianos?	Establecer la σ-Álgebra producto de los borelianos	La σ-Álgebra de los borelianos	El tipo de investigación es básica a nivel descriptivo
¿Cuál es el cardinal de la σ-Álgebra de los borelianos en $\mathbb{R}$?	Determinar el cardinal de la σ-Álgebra de los borelianos en $\mathbb{R}$		
¿Qué otras medidas se desprenden a partir de la definicion de medida de Borel?	Encontrar otras medidas a partir de las medidas de Borel		